

I. *Ueber die Anordnung der Elektrizität auf einer einzelnen sehr dünnen Platte und auf den beiden Belegungen einer Franklin'schen Tafel;*
von R. Clausius.

Man hat sich in der mathematischen Physik vielfach damit beschäftigt, die Anordnung der Elektrizität auf leitenden Körpern zu bestimmen, sowohl wenn diese, nachdem sie elektrisirt sind, sich selbst überlassen bleiben, als auch wenn sie unter dem Einflusse anderer in der Nähe befindlicher leitender Körper stehen. Man hat dabei jedoch selten den speciellen Fall untersucht, wo die leitenden Körper die Form von sehr dünnen Platten haben, und doch scheint mir dieser Fall von besonderer Wichtigkeit zu seyn, weil das Hauptinstrument für Maschinenelektricität, die Leidener Flasche, aus zwei solchen Platten, nämlich den beiden Belegungen besteht, welche gegenseitig auf einander einwirken.

Die beste Behandlung dieses Gegenstandes, welche mir bekannt geworden ist, findet sich in dem achten Artikel des vortrefflichen Aufsatzes von George Green, in welchem er zuerst den Namen »Potentialfunction« einführt¹⁾. Dieser stellt sich dort die Aufgabe gleich sehr allgemein, indem er die Belegungen als von beliebiger Form und Krümmung annimmt, und nur den Abstand zwischen beiden als überall sehr klein gegen ihre sonstigen Ausdehnungen voraussetzt. Nach einer anderen Richtung hin beschränkt er seine Untersuchung jedoch bedeutend, indem

1) *An Essay on the Application of mathematical Analysis to the theories of Electricity and Magnetism; by George Green. Nottingham 1828. Im Auszuge Crelle's Journ. XXXIX. S. 73.*

er an jeder Belegung die beiden Gränzflächen unterscheidet, und nur die Elektricität betrachtet, welche sich auf der dem Glase zugewandten Fläche befindet, und dagegen diejenige, welche auf der vom Glase abgewandten Fläche bleibt, vernachlässigt.

Aber gerade die Bestimmung der letzteren bietet besondere Schwierigkeiten dar, und ich glaube daher, hier eine Untersuchung mittheilen zu dürfen, bei der ich mich nach der einen Richtung hin weit mehr beschränkt habe als Green, indem ich bei der *einfachsten* Form einer Leidener Flasche, nämlich bei der sogenannten *Franklin'schen Tafel mit kreisförmigen Belegungen*, stehen geblieben bin, dafür aber bei dieser die *ganze* auf jeder Belegung befindliche Elektricitätsmenge betrachtet habe.

Bevor wir jedoch zu diesem Gegenstande übergehen, möge noch eine andere Betrachtung hier Platz finden, welche theils für das Folgende nothwendig, theils, wie es mir scheint, an sich von Interesse ist, nämlich über die Anordnung der Elektricität auf einer *einzelnen stehenden Platte*, und dabei wollen wir diese nicht als kreisförmig sondern gleich allgemeiner als *ellipsenförmig* annehmen.

Die Platte wurde vorher nur als *sehr* dünn bezeichnet, in der Rechnung aber wollen wir sie als *unendlich* dünn, oder als ein Stück einer mathematischen Ebene betrachten und wollen dabei die auf beiden Seiten befindlichen Elektricitätsmengen in Einem Ausdruck zusammenfassen. Zugleich soll vorausgesetzt werden, daß die Platte *vollkommen isolirt* sey, so daß selbst, wenn die Dichtigkeit der Elektricität am Rande der Platte unendlich groß wird, keine Elektricität entweichen könne. Wie sich die so gewonnenen Resultate für wirklich vorkommende Fälle, in welchen jene Bedingungen nur angenähert erfüllt sind, ändern müssen, wird man dann leicht übersehen können.

Wenn man einem aus einem leitenden Stoffe bestehenden soliden *Körper* Elektricität mittheilt, so ist es bekannt, daß alle diese Elektricität sich nach der Oberfläche begiebt, so daß im Innern des Körpers gar keine freie Elektricität bleibt. Anders wird es bei einer begränzten

Fläche seyn. Auch hier wird sich zwar die Elektricität nach dem Rande hindrängen, doch wird sie sich nicht *alle* dort anhäufen, sondern der Gleichgewichtszustand wird sich so herstellen, daß die Dichtigkeit der Elektricität von Innen nach dem Rande zu nach einem bestimmten von der Gestalt der Fläche abhängigen Gesetze zunimmt.

Um die Function, welche die Dichtigkeit der Elektricität an den verschiedenen Stellen der Platte angiebt, zu bestimmen, müßte man eigentlich die Formel für die Potentialfunction ¹⁾ an irgend einem ihrer Punkte in Bezug auf die über ihre ganze Fläche verbreitete Elektricität aufstellen, und dann der darin vorkommenden Dichtigkeitsfunction eine solche Gestalt geben, daß dadurch die Potentialfunction für die ganze Ausdehnung der Platte constant wird. Wenn man indessen diesen Weg einschlägt, so stößt man bald auf bedeutende Schwierigkeiten, während man durch ein anderes Verfahren auf einem kleinen Umwege die gesuchte Function sehr leicht erhalten kann.

Die Verbreitung der Elektricität über ein Ellipsoid ist bekannt ²⁾. Denkt man sich nämlich die Elektricität als eine sich an der Oberfläche des Körpers hinziehende sehr dünne Schicht, welche mit elektrischem Fluidum von durchweg gleicher Dichtigkeit angefüllt ist, aber an den verschiedenen Punkten der Oberfläche eine verschiedene Dicke hat, so daß die Dicke der Schicht an irgend einem Punkte die dort angehäufte Quantität von Elektricität angiebt, oder dem entspricht, was man sonst gewöhnlich als die Dichtigkeit der Elektricität bezeichnet, so ist diese Schicht

1) Ich habe absichtlich statt des jetzt gebräuchlichen Wortes *Potential* an dieser Stelle und im Folgenden den älteren von Green angewandten Ausdruck *Potentialfunction* beibehalten, um die hier betrachtete Größe, in welcher nur Eine der beiden einander anziehenden oder abstoßenden Massen als Factor vorkommt, von der ebenfalls mit dem Worte *Potential* bezeichneten Größe, in welcher sie beide als Factoren vorkommen, zu unterscheiden.

2) S. z. B. Poisson, *Mém. sur la Distribution de l'Electr. à la surface des corps conducteurs. Mém. de l'Inst. de France. Ann. 1811 prem. Partie p. 4.*

fläche des Ellipsoids wählen wir irgend einen Punkt M mit den Coordinaten x , y und z , ziehen von dort die Linie MO nach dem Mittelpunkte, deren Länge mit ρ bezeichnet werde, fällen das Perpendikel MN auf die Ebene der xy , und errichten endlich in M auf die Oberfläche die Normale MP , welche letztere aber nicht, wie es in der Figur vielleicht scheint, in der Ebene des Papiers zu liegen braucht. Die Winkel PMO und PMN bezeichnen wir der Kürze wegen mit φ und ψ .

Wir nehmen nun bei M ein Element $d\sigma$ der Ellipsoidfläche, und projeciren dieses senkrecht auf die Ebene der xy , wodurch wir als Projection ein bei N liegendes Flächenelement $d\omega$ erhalten. Auf dieses Element denken wir uns die auf dem Elemente $d\sigma$ befindliche Elektricität verlegt, und ebenso die Elektricität, welche sich auf einem bei dem gegenüber liegenden Punkte M' genommenen ebenso grossen Elemente $d\sigma'$ befindet, und bestimmen dann die dadurch entstehende elektrische Dichtigkeit bei N .

Die elektrische Dichtigkeit bei dem Punkte M und die natürlich ebenso grosse Dichtigkeit bei dem ganz symmetrisch liegenden Punkte M' sey mit Y , und die gesuchte Dichtigkeit bei N mit Z bezeichnet, so ist:

$$(2.) \quad Z = 2Y \frac{d\sigma}{d\omega},$$

weil die Elektricität von den beiden gleichen Elementen $d\sigma$ und $d\sigma'$ auf das Eine Element $d\omega$ zusammengedrängt ist. Ferner ist, wie man leicht aus der Figur ersieht:

$$d\omega = d\sigma \cdot \cos \psi$$

und somit:

$$(3.) \quad Z = \frac{2Y}{\cos \psi}.$$

Hierin muß zunächst die Gröfse Y näher bestimmt werden. Dazu gehen wir zu der Vorstellung zurück, daß die Elektricität eine zwischen zwei concentrischen, ähnlichen Ellipsoidflächen eingeschlossene Schicht bilde. Wir denken uns die zweite Ellipsoidfläche etwas gröfser als die bisher betrachtete, und zwar so, daß die Axen in dem

Verhältnisse von $1:1+\delta$ zu einander stehen. Dann muß auch die Linie OM , wenn sie bis zur zweiten Fläche fortgesetzt wird, statt der Länge ρ die Länge $\rho(1+\delta)$ annehmen, so daß das zwischen beiden Flächen liegende Stück der Linie $=\rho\delta$ ist; und daraus ergibt sich für die Dicke der Schicht an dieser Stelle, oder für die elektrische Dichtigkeit daselbst, der Ausdruck:

$$Y = \rho\delta \cdot \cos\varphi.$$

Die hierin vorkommende Gröfse δ kann eliminirt werden, sobald die ganze auf dem Ellipsoïd befindliche Elektrizitätsmenge, welche Q heißen möge, bekannt ist. Diese Elektrizitätsmenge wird nämlich bei dieser Vorstellung durch das Volumen der ganzen Ellipsoïdschicht repräsentirt, und wir haben also:

$$Q = \frac{4}{3}abc \cdot \pi [(1+\delta)^3 - 1],$$

wofür wir, da δ als sehr klein angenommen ist, setzen können:

$$Q = 4abc \cdot \pi \cdot \delta,$$

und durch diese Gleichung geht der vorige Ausdruck von Y über in:

$$(4.) \quad Y = Q \cdot \frac{\rho \cos\varphi}{4abc \cdot \pi}.$$

Substituirt man diesen Ausdruck in (3), so kommt:

$$(5.) \quad Z = \frac{Q}{2abc \cdot \pi} \cdot \frac{\rho \cos\varphi}{\cos\psi}.$$

Es muß nun noch der Bruch $\frac{\rho \cos\varphi}{\cos\psi}$ durch die Coordinaten x und y des Punktes N ausgedrückt werden. Dazu wissen wir nach bekannten Sätzen der analytischen Geometrie, daß die Gleichungen der Normale MP

$$\frac{x'-x}{a^2} = \frac{y'-y}{b^2} = \frac{z'-z}{c^2},$$

und die der Linie MO

$$\frac{x'-x}{x} = \frac{y'-y}{y} = \frac{z'-z}{z}$$

sind, wenn wir mit x' , y' und z' die laufenden Coordinaten

der Linien bezeichnen; und daraus ergibt sich für den von diesen beiden Linien eingeschlossenen Winkel φ :

$$\cos \varphi = \frac{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}}},$$

oder, wenn wir statt des Werthes $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, welcher die Strecke MO darstellt, den dafür eingeführten Buchstaben ρ setzen, und die Gleichung (1) berücksichtigen:

$$\cos \varphi = \frac{1}{\rho \cdot \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}}}.$$

Ferner ergibt sich aus dem ersten der beiden vorigen Systeme von Gleichungen für den Winkel ψ , welchen die Normale MP mit MN , also mit einer der Axe der z parallelen Linie bildet, die Gleichung:

$$\cos \psi = \frac{\frac{z}{c}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}}}.$$

Setzt man diese Werthe von $\cos \varphi$ und $\cos \psi$ in (5) ein, so kommt:

$$(6.) \quad Z = \frac{Q}{2ab\pi} \cdot \frac{c}{z},$$

und da nach (1)

$$\frac{z}{c} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$

ist, so erhält man als Schlussgleichung:

$$(I.) \quad Z = \frac{Q}{2ab\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}.$$

Da in diesem Ausdrucke c gar nicht mehr vorkommt, so ist er für alle Werthe von c gleich, und wird also auch derselbe bleiben, wenn c unter Anderen unendlich klein wird, und somit ist dieses Z der gesuchte Ausdruck für

die elektrische Dichtigkeit auf einer mit der Elektricitätsmenge Q versehenen elliptischen Ebene mit den Axen a und b .

Nehmen wir insbesondere die Ellipse als einen Kreis mit dem Radius a an, und bezeichnen die GröÙe $\sqrt{x^2 + y^2}$, welche den Abstand des auf dem Kreise betrachteten Punktes vom Mittelpunkte bedeutet, mit r , so kommt:

$$(II.) \quad Z = \frac{Q}{2a^2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}}.$$

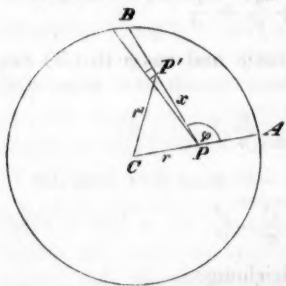
Nachdem wir so den Ausdruck für die elektrische Dichtigkeit einmal gefunden haben, können wir nun den Beweis, daß er in der That der richtige ist, auch unabhängig von jenem Ellipsoïd führen, indem wir zeigen, daß durch ihn die oben erwähnte Bedingung, daß die Potentialfunction über die ganze Ausdehnung der Fläche constant sey, erfüllt wird. Wir wollen dieses indessen hier nur für den speciellen Fall der Kreisfläche ausführen.

Die nebenstehende Figur zeigt diesen Kreis, und es sey darin P ein im Abstände r von dem Mittelpunkte C genommener Punkt, für welchen die Potentialfunction bestimmt werden soll. Man nehme dazu P als Mittelpunkt von Polarcoordinaten, so daß x und φ die zu diesem Systeme gehörigen Coordinaten irgend eines anderen Punktes P' seyen.

Dann wird das bei P liegende Flächenelement durch $x dx d\varphi$ ausgedrückt, und wenn man den Abstand des Punktes P' von C mit r' , und demgemäß die bei P' stattfindende elektrische Dichtigkeit mit Z' bezeichnet, so ist die auf diesem Elemente befindliche Elektricitätsmenge:

$$Z' x dx d\varphi.$$

Die Potentialfunction dieser Elektricitätsmenge, welche



um die Strecke x von dem betrachteten Punkte P entfernt ist, wird dargestellt durch

$$(7.) \quad -\frac{Z' x dx d\varphi}{x} = -Z' dx d\varphi$$

worin das $-$ Zeichen für den Fall gilt, wo die auf der Platte befindliche Elektricität positiv ist, indem die Potentialfunction auf ein ebenfalls positives Elektricitätstheilchen bezogen wird, und die wirksame Kraft daher eine Abstoßung ist ¹⁾.

Die hierin vorkommende Gröfse Z' ist nach Gleichung (II.):

$$Z' = \frac{Q}{2a^2\pi} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{r'^2}{a^2}}} = \frac{Q}{2a\pi} \frac{1}{\sqrt{a^2-r'^2}}$$

und zugleich ist, wie man leicht aus der Figur ersieht:

$$r'^2 = r^2 + 2rx \cos \varphi + x^2,$$

und somit geht (7.) über in

$$(8.) \quad -\frac{Q}{2a\pi} \frac{dx d\varphi}{\sqrt{a^2-r^2-2rx \cos \varphi-x^2}}.$$

Diesen Ausdruck muß man, um die Potentialfunction der ganzen auf der Platte befindlichen Elektricität zu erhalten, für die ganze Kreisfläche integrieren. Dazu integriere man zuerst nach x von Null bis zu einem Werthe, der in der Figur durch PB dargestellt wird, und der mit x_1 bezeichnet werde. Er hängt offenbar, außer von der für diese Integration constanten Gröfse r , von dem Winkel φ ab, und ist durch die Gleichung:

$$(9.) \quad x_1 = \sqrt{a^2 - r^2 \sin^2 \varphi} - r \cos \varphi$$

bestimmt. Nachdem dieser Ausdruck in dem nach x genommenen Integrale als obere Gränze eingesetzt ist, muß nach φ von 0 bis 2π integrirt werden.

1) Green hat die Vorzeichen anders gewählt, indem er die Potentialfunction positiv und negativ setzt, je nach dem die Elektricität positiv oder negativ ist, es scheint indessen zweckmäßiger zu seyn, das positive Vorzeichen für den Fall der Anziehung zu gebrauchen.

Nun ist:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - r^2 - 2rx \cos \varphi - x^2}} = \text{arc. sin } \frac{x + r \cos \varphi}{\sqrt{a^2 - r^2 \sin^2 \varphi}} + \text{Const.}$$

und somit nach Gleichung (9):

$$(10.) \int_0^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - r^2 - 2rx \cos \varphi - x^2}} = \frac{\pi}{2} - \text{arc. sin } \frac{r \cos \varphi}{\sqrt{a^2 - r^2 \sin^2 \varphi}},$$

wobei im zweiten Gliede der arc. zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ genommen werden muß. Wenn dieser Ausdruck nach φ von 0 bis 2π integrirt wird, so giebt das erste Glied π^2 . Das zweite Glied dagegen giebt Null, wie man gleich daran sieht, daß, wenn man statt irgend eines Werthes von φ den um π größeren Werth setzt, dann die Gröfse $\text{arc. sin } \frac{r \cos \varphi}{\sqrt{a^2 - r^2 \sin^2 \varphi}}$ bei gleichem numerischen Werthe das entgegengesetzte Zeichen annimmt; denn daraus folgt weiter, daß das Integral von 0 bis π dem von π bis 2π numerisch gleich aber entgegengesetzt ist, und daher diese beiden Theile des von 0 bis 2π zu nehmenden Integrales sich gegenseitig aufheben. Somit bleibt π^2 der Werth des ganzen Integrals von (10.), und der Ausdruck (8.) geht also durch die doppelte Integration in die von r unabhängige Gröfse

$$(11.) \quad -\frac{Q\pi}{2a}$$

über, d. h. die Potentialfunction ist, wie es gefordert wurde, für die ganze Kreisfläche constant.

Aus der Gleichung (II.) ergibt sich, daß die elektrische Dichtigkeit nach der Peripherie zu stark wächst, und an der Peripherie selbst, wo $r=a$ ist, unendlich wird, und dasselbe ergibt sich aus der Gleichung (I.) für die Ellipse; doch ist dieses Wachsen nicht von der Art, daß die Elektrizität in so überwiegender Menge an der Peripherie angehäuft wäre, daß man dagegen die im Inneren befindliche Elektrizitätsmenge vernachlässigen könnte. Um

in dieser Beziehung ein bestimmtes Urtheil zu gewinnen, wollen wir uns die ganze Kreisfläche in eine innere concentrische Kreisfläche mit dem Radius b , (indem $b < a$ angenommen wird), und in den zwischen beiden Peripherien liegenden Ring getheilt denken, und die auf beiden Theilen befindlichen Elektricitätsmengen bestimmen. Bezeichnen wir dieselben mit R und S , so haben wir nach (II.):

$$(12.) \quad \left\{ \begin{aligned} R &= \frac{Q}{2a^2\pi} \iint_0^{2\pi} \int_0^b \frac{r dr d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}} = Q \left(1 - \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \right) \\ S &= \frac{Q}{2a^2\pi} \iint_0^{2\pi} \int_b^a \frac{r dr d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}} = Q \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}. \end{aligned} \right.$$

Setzen wir hierin z. B. $b = \frac{1}{3}a$, so ist:

$$R = \frac{2}{3}Q \text{ und } S = \frac{1}{3}Q,$$

und setzen wir $b = \frac{1}{\sqrt{3}}a$, so ist:

$$R = \frac{2}{3}Q \text{ und } S = \frac{1}{3}Q.$$

- 1) Nachdem ich meinen Aufsatz beendet hatte, wurde ich noch auf zwei andere Schriften aufmerksam gemacht, in welchen auch die Anordnung der Elektricität auf einer einzelnen Platte vorkommt, und welche mir bis dahin unbekannt geblieben waren. Die Eine ist eine spätere Arbeit von Green (*Mathematical Investigation concerning the Laws of the Equilibrium of Fluids analogous to the Electric Fluid with other similar Researches; by George Green. Transact. of the Cambridge Phil. Soc. Vol. V.*) Darin behandelt der Verfasser, nachdem er das Verhalten einer soliden Kugel bestimmt hat, als Analogon eine Kreisplatte, welche selbst mit einer gewissen Quantität jenes Fluidums versehen ist, und zugleich unter dem Einflusse beliebiger anderer Quantitäten desselben steht, welche sich außer ihr, aber in derselben Ebene befinden, und eine bestimmte Anordnung haben. Er gelangt dabei auf einem ganz andern Wege, als dem von uns eingeschlagenen, zu einer Formel, die für den besonderen Fall, daß das Fluidum Elektricität ist, und daß keine äußeren Einflüsse stattfinden, mit der oben unter (II.) gegebenen Formel übereinstimmt. Zur Bestä-

Man sieht leicht, daß das Ellipsoid ebenso, wie es im Vorigen durch die Verkleinerung Einer Axe in eine dünne Platte, und als Gränze in eine mathematische Fläche verwandelt ist, auch durch die Verkleinerung zweier Axen in einen Stab, und als Gränze in eine mathematische Linie

tigung derselben führt er eine von Biot (*Traité de Physic. T. II, p. 277*; deutsche Bearbeitung von Fechner Bd. II, S. 191) mitgetheilte Versuchsreihe von Coulomb an, welche ich hier ebenfalls aufnehmen will. Die Versuche wurden an einer Kupferplatte von 10" Durchmesser angestellt, deren Dicke nicht näher angegeben wird. Da aber die Dicke im Verhältnisse zum Durchmesser jedenfalls gering gewesen ist, so können wir die an den verschiedenen Punkten, mit Ausnahme derer dicht am Rande, beobachteten Dichtigkeiten mit den berechneten vergleichen.

Abstand vom Rande der Platte.	Beobachtete Dich- tigkeit.	Berechnete Dich- tigkeit.
5"	1	1
4"	1,001	1,020
3"	1,005	1,090
2"	1,17	1,250
1"	1,52	1,667
0",5	2,07	2,294
0	2,90	∞

Green bemerkt dazu: „Wir sehen also, daß die Differenzen zwischen den berechneten und beobachteten Dichtigkeiten gering sind, und überdies sind die beobachteten immer etwas kleiner als die berechneten, was offenbar der Fall seyn mußte, indem die letzteren unter der Annahme einer *unendlich* kleinen Dicke bestimmt sind, und daher etwas größer ausfallen mußten, als wenn die Dicke eine *endliche* GröÙe ist, wie es nothwendig bei Coulomb's Experimenten seyn mußte.“ — Die zweite Schrift hat zum Titel: *Elementary Principles of the Theories of Electricity, Heat and Molecular Actions; by R. Murphy. Part I, on Electricity. Cambridge 1833.* Darin wird p. 70 ebenfalls die Anordnung der Elektrizität auf einer Kreisplatte bestimmt, und hier stimmt auch das angewandte Verfahren im Wesentlichen mit dem oben gewählten überein. — Da indessen Green und Murphy sich auf die Kreisplatte beschränken, während die oben unter (I.) gegebene Gleichung allgemein für die Ellipse gilt, und da auch der von mir hinzugefügte directe Beweis vielleicht dazu beitragen kann, das Zutrauen zu den Formeln noch zu vermehren, so habe ich geglaubt, daß meine Entwicklung durch jene früheren Arbeiten doch nicht ganz überflüssig gemacht sey, und habe sie daher ungeändert stehen lassen.

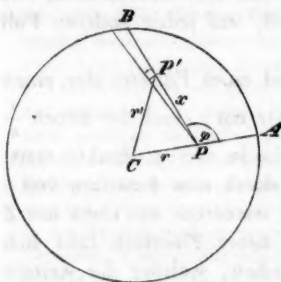
verwandelt werden kann. Man findet dann, daß die Elek-
tricität sich über die Linie *gleichförmig* verbreitet. Dieser
Fall ist indessen an sich zu einfach, als daß man bei ihm
eines solchen Hilfsmittels bedürfte, und wir wollen uns
daher nicht weiter bei ihm aufhalten, sondern uns zur Be-
trachtung der *Franklin'schen Tafel* wenden.

Die in dieser Bezeichnung zusammengefaßten Bedin-
gungen mögen, soweit sie für die Frage wesentlich sind,
in folgender Weise genauer festgestellt werden. Es sind
zwei sehr dünne Kreisplatten mit dem gleichem Radius a
gegeben, welche in dem Abstände c parallel neben einan-
der stehen, so daß die Gerade, welche ihre Mittelpunkte
verbindet, auf beiden Ebenen senkrecht ist. Beide Platten
bestehen aus einem leitenden Stoffe, sind aber durch ei-
nen nicht leitenden Stoff von einander getrennt, und auch
im Uebrigen vollkommen isolirt. In Bezug auf die Art
der Ladung wird vorläufig angenommen, daß nicht, wie
es in der Praxis gewöhnlich geschieht, nur der Einen
Platte Elektrizität zugeführt wird, während die andere mit
der Erde in leitender Verbindung steht, wobei diese na-
türlich weniger Elektrizität aufnimmt als jene, sondern, daß
die Mengen entgegengesetzter Elektrizität, mit welchen
beide Platten versehen werden, *gleich* seyen. Der letztere
Fall ist nämlich für die Behandlung einfacher, weil bei ihm
die Verbreitung der Elektrizität offenbar auf beiden Platten
gleich ist, und daher nur Eine Function bestimmt zu wer-
den braucht; und von diesem Falle läßt sich alsdann, wie
weiter unten gezeigt werden soll, auf jeden anderen Fall
der Ladung schließen.

Sey nun der Abstand irgend eines Punktes der einen
Kreisfläche von ihrem Mittelpunkte mit r , und der Bruch $\frac{r}{a}$
mit z bezeichnet, so läßt sich die in diesem Punkte statt-
findende elektrische Dichtigkeit durch eine Function von z
darstellen, und wir wollen diese wiederum wie oben mit Z
bezeichnen. Ueber die Natur dieser Function läßt sich
gleich im Voraus ein Schluß ziehen, welcher die weitere

Behandlung erleichtert. Während wir nämlich vorher den Abstand des gewählten Punktes vom Mittelpunkte stillschweigend als eine absolute Gröfse vorausgesetzt haben, können wir auch, wenn wir statt der ganzen Kreisfläche nur einen einzelnen Durchmesser betrachten, die Lage der auf demselben befindlichen Punkte dadurch näher charakterisiren, dafs wir, je nachdem sie an der einen oder anderen Seite vom Mittelpunkte liegen, ihre Abstände mit dem positiven oder negativen Vorzeichen versehen. Da nun die elektrische Dichtigkeit an je zwei nach beiden Seiten hin von der Mitte gleich weit entfernten Punkten dieselbe seyn muß, so können wir schliessen, dafs die Function Z durch die Umkehrung des Vorzeichens von z ihren Werth nicht ändert. Ferner können wir annehmen, dafs wenn die Gröfse z allmählig von positiven zu negativen Werthen übergeht, bei ihrem Durchgange durch Null die von ihr abhängige Function Z mit allen ihren Differentialcoefficienten stetig bleibt, da durchaus kein Grund vorhanden ist, weshalb hier eine Discontinuität eintreten sollte. Demnach können wir uns Z in eine nach steigenden Potenzen von z geordnete Reihe entwickelt denken und dabei sicher seyn, dafs nur *gerade* Potenzen von z vorkommen, und wir wollen daher auch Z von Vorne herein nicht als eine Function von z sondern von z^2 betrachten.

Zur Bestimmung dieser Function dient die Bedingung, dafs die Potentialfunction der auf beiden Platten befindlichen



Elektricität zusammengekommen über die ganze Ausdehnung jeder der beiden Platten constant sey. Wir wollen diese Bedingung im Folgenden kurz die *Gleichgewichtsbedingung* nennen. Stelle jetzt der Kreis in nebenstehender Figur die Platte dar, welche mit positiver Elektricität geladen ist,

so wollen wir den Ausdruck der Potentialfunction für den Punkt P entwickeln, wobei aber vorläufig vorausgesetzt sey, daß P nicht zu nahe am Rande liege, sondern daß seine Entfernung von demselben, nämlich $PA = a - r$, im Verhältnisse zu dem Abstände c der beiden Platten unter einander noch als groß angesehen werden könne. Für den Rand und die in seiner Nähe liegenden Punkte müssen, wie man bald sehen wird, besondere Betrachtungen angestellt werden.

Heiße nun V_1 die Potentialfunction in Bezug auf die auf derselben Platte befindliche Elektricität, V_2 die Potentialfunction in Bezug auf die auf der andern Platte befindliche, und endlich V die vollständige Potentialfunction in Bezug auf beide Elektricitätsmengen, so ist zunächst ganz der oben für eine einzelne Platte ausgeführten Entwicklung entsprechend:

$$V_1 = - \int_0^{2\pi} \int_0^{x_1} Z' dx d\varphi$$

worin

$$x_1 = \sqrt{a^2 - r^2 \sin^2 \varphi} - r \cos \varphi$$

oder

$$(13.) \quad x_1 = a(\sqrt{1 - z^2 \sin^2 \varphi} - z \cos \varphi).$$

ist. Um ferner den Ausdruck für V_2 zu erhalten, braucht man in dem Ausdrucke (7.) nur statt des Nenners x zu setzen $\sqrt{c^2 + x^2}$, und das negative Vorzeichen in das positive zu verwandeln, weil die auf der andern Platte befindliche Elektricität negativ ist, und daher eine *Anziehung* ausübt, und dann, wie vorher, die Integralzeichen hinzuzufügen, also:

$$V_2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{x_1} Z' \frac{x}{\sqrt{c^2 + x^2}} dx d\varphi,$$

und aus diesen beiden Ausdrücken ergibt sich:

$$(14.) \quad V = - \int_0^{2\pi} \int_0^{x_1} Z' \left(1 - \frac{x}{\sqrt{c^2 + x^2}} \right) dx d\varphi.$$

Wir denken uns nun diese Potentialfunction, welche für $c=0$ offenbar selbst in Null übergeht, durch eine nach steigenden Potenzen von c geordnete Reihe dargestellt, und wollen von dieser zunächst nur das erste Glied, welches in Bezug auf c von der ersten Ordnung ist, bestimmen.

Dazu entwickeln wir auch die Gröfse Z' , welche die elektrische Dichtigkeit beim Punkte P vorstellt, in eine Reihe, und zwar folgendermaßen:

$$Z' = Z + \frac{dZ}{dz}(z'^2 - z^2) + \frac{1}{2} \frac{d^2Z}{(dz)^2}(z'^2 - z^2)^2 \\ + \frac{1}{2.3} \frac{d^3Z}{(dz)^3}(z'^2 - z^2)^3 \text{ etc.}$$

Nun ist, wie man leicht aus der Figur ersieht:

$$r'^2 = r^2 + 2rx \cos \varphi + x^2$$

und daher:

$$z'^2 - z^2 = 2z \frac{x}{a} \cos \varphi + \frac{x^2}{a^2}$$

und wenn man diesen Ausdruck in die vorige Reihe einsetzt, und dann nach x ordnet, so nimmt sie folgende Gestalt an:

$$(15.) Z' = Z + u_1 \cos \varphi . x + u_2 . x^2 + u_3 \cos \varphi . x^3 + u_4 . x^4 + \text{etc.}$$

worin u_1, u_2, u_3, u_4 etc. Functionen von z und $\cos \varphi$ sind, welche aber von $\cos \varphi$ nur gerade Potenzen enthalten, so daß die nach x geraden oder ungeraden Glieder der Reihe, auch ebenso nach $\cos \varphi$ gerade oder ungerade sind. Diese Reihe denken wir uns in Gleichung (14) für Z' substituirt.

Die in dieser Gleichung geforderte Integration nach x theilen wir uns dann in zwei Theile, deren ersterer als untere Gränze 0, und als obere Gränze einen beliebigen von φ unabhängigen Werth x_0 hat, welcher kleiner als der kleinste vorkommende Werth von x_1 , aber doch gegen c groß ist, was der Fall seyn kann, da wir angenommen haben, daß die Entfernung des Punktes P vom Rande gegen c groß sey. Der andere Theil des Integrales

um-

umfasst dann den noch übrigen Raum der Platte, und hat als untere Gränze jenen constanten Werth x_0 und als obere den von φ abhängigen Werth x_1 .

In dem ersten Theile sind die Gränzen der beiden Integrationen x und φ von einander vollkommen unabhängig, und wir können daher, abweichend von der sonst vorgeschriebenen Ordnung, auch zuerst nach φ und dann nach x integrieren. Nun ist aber, wenn n eine ganze Zahl bedeutet:

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n+1} \varphi d\varphi = 0,$$

und somit fallen alle nach x ungeraden Glieder, welche auch nach $\cos \varphi$ ungerade waren, fort. In Bezug auf die geraden Glieder haben wir für das erste:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi,$$

und für die übrigen wollen wir die entsprechenden Integrale nur durch die Buchstaben:

$$\int_0^{2\pi} u_2 d\varphi = U_2, \quad \int_0^{2\pi} u_4 d\varphi = U_4 \text{ etc.}$$

andeuten, dann nimmt der gesuchte erste Theil des Integrales (14.) folgende Form an:

$$(16.) - \int_0^{x_0} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{c^2 + x^2}}\right) (2\pi Z + U_2 x^2 + U_4 x^4 + \text{etc.}) dx.$$

Das erste Glied der Reihe giebt:

$$-2\pi Z \int_0^{x_0} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{c^2 + x^2}}\right) dx = -2\pi Z (x_0 - \sqrt{c^2 + x_0^2} + c).$$

Hierin kann man $\sqrt{c^2 + x_0^2}$, da x_0 groß gegen c ist, nach Potenzen von c^2 entwickeln, nämlich:

$$(17.) \quad \sqrt{c^2 + x_0^2} = x_0 + \frac{1}{2} \frac{c^2}{x_0} - \frac{1}{8} \frac{c^4}{x_0^3} + \text{etc.}$$

und erhält dadurch:

$$-2\pi Z \int_0^{x_0} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{c^2 + x^2}}\right) dx = -2\pi Z \left(c - \frac{1}{2} \frac{c^3}{x_0} + \frac{1}{8} \frac{c^5}{x_0^3} - \text{etc.}\right)$$

wovon aber für den jetzt vorliegenden Zweck nur die Gröfse

$$(18.) \quad -2\pi Z \cdot c$$

von Bedeutung ist.

Was die übrigen Glieder des Ausdrucks (16.) betrifft, so hat man ganz allgemein:

$$\begin{aligned} \int_0^{x_0} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{c^2 + x^2}}\right) x^{2n} dx &= \frac{x_0^{2n+1}}{2n+1} - \left(\frac{x_0^{2n}}{2n+1} - \frac{2n \cdot x_0^{2n-2}}{(2n+1)(2n-1)} c^2 + \dots \right. \\ &\quad \left. \pm \frac{2n(2n-2) \dots 2}{(2n+1)(2n-1) \dots 1} c^{2n}\right) \sqrt{c^2 + x_0^2} \pm \frac{2n(2n-2) \dots 2}{(2n+1)(2n-1) \dots 1} c^{2n+1}. \end{aligned}$$

Setzt man hierin wieder für $\sqrt{c^2 + x_0^2}$ die Reihe (17.), so heben sich die von c unabhängigen Glieder fort, und es bleiben nur Glieder von zweiter und höherer Ordnung übrig, welche hier nicht berücksichtigt werden.

Betrachten wir nun den zweiten Theil des Integrales, der nach x von x_0 bis x_1 genommen werden mufs, so sind hierin alle vorkommenden Werthe von x grofs gegen c , und wir können daher den Ausdruck

$$1 - \frac{x}{\sqrt{c^2 + x^2}}$$

von Vorne herein nach Potenzen von c^2 entwickeln, wodurch er in

$$\frac{1}{2} \frac{c^2}{x^2} - \frac{3}{8} \frac{c^4}{x^4} + \text{etc.}$$

übergeht. Da, wie man sieht, auch hierin nur Glieder von der zweiten Ordnung ab vorkommen, so bleibt die oben gefundene Gröfse (18.) das einzige in der Potentialfunction V enthaltene Glied erster Ordnung, und man kann also schreiben:

$$(19.) \quad V = -c \cdot 2\pi \cdot Z + c^2 U$$

worin U eine für jetzt unbekannte Function von c und z^2 ist.

Aus diesem Resultate ergibt sich zunächst, daß man die Gleichgewichtsbedingung wenigstens in Bezug auf das erste und bedeutendste Glied der Potentialfunction einfach dadurch erfüllen kann, daß man die Function Z selbst als constant annimmt, und wir setzen daher als erste rohe Annäherung:

$$(20.) \quad Z = A.$$

Um nun zu sehen, wie diese Gleichung geändert werden muß, um einen genaueren Ausdruck für Z zu gewinnen, wollen wir unter Annahme dieser Gleichung die Potentialfunction V auf mehr als Ein Glied entwickeln.

Die Gleichung (14.) geht durch (20.) über in

$$V = -A \int_0^{2\pi} \int_0^{x_1} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{c^2 + x^2}} \right) dx d\varphi,$$

und daraus erhält man sogleich:

$$V = -A \int_0^{2\pi} (x_1 - \sqrt{c^2 + x_1^2} + c) d\varphi$$

oder nachdem man $\sqrt{c^2 + x_1^2}$ in eine Reihe entwickelt hat:

$$(21.) \quad V = -c \cdot 2\pi A + c^2 \cdot \frac{A}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{x_1} - c^4 \frac{A}{8} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{x_1^3} + \text{etc.}$$

Hierin muß für x_1 der in (13.) gegebene Ausdruck gesetzt werden. Dadurch erhält man;

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{x_1} &= \frac{1}{a} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - z^2 \sin^2 \varphi - z \cos \varphi}} \\ &= \frac{1}{a} \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{1 - z^2 \sin^2 \varphi + z \cos \varphi}}{1 - z^2} d\varphi, \end{aligned}$$

und da man weiß, daß

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{1-z^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-z^2 \sin^2 \varphi} d\varphi$$

$$\int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi = 0$$

ist, so kommt:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{x_1} = \frac{4}{a} \cdot \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-z^2 \sin^2 \varphi} d\varphi}{1-z^2},$$

und somit wird aus (21.), wenn man sich auf die Entwicklung der beiden ersten Glieder beschränkt:

$$(22.) \quad V = -c \cdot 2\pi A + c^2 \cdot \frac{2A}{a} \cdot \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-z^2 \sin^2 \varphi} d\varphi}{1-z^2} - \text{etc.}$$

Hieraus ergibt sich, daß die Annahme, daß Z constant ($=A$) sey, der Gleichgewichtsbedingung in dem zweiten Gliede der Potentialfunction nicht mehr genügt, da dieses von z abhängig ist. Man kann aber aus dem oben gewonnenen und in Gleichung (19.) ausgedrückten Resultate leicht schließen, welchen Zusatz man zu A machen muß, um dieses zweite Glied aus der Potentialfunction ganz fortzuschaffen, so daß ihre Veränderlichkeit erst mit dem Gliede dritter Ordnung beginnt. Fügt man nämlich die GröÙe

$$c \cdot \frac{A}{a\pi} \cdot \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-z^2 \sin^2 \varphi} d\varphi}{1-z^2}$$

hinzu, so fängt der aus dieser GröÙe entstehende Theil der Potentialfunction nach (19.) mit dem Gliede

$$-c^2 \cdot \frac{2A}{a} \cdot \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-z^2 \sin^2 \varphi} d\varphi}{1-z^2}$$

an, und dieses hebt sich gerade gegen das zweite Glied des Ausdruckes (22.) auf, so daß man nun setzen kann:

$$(23.) \quad V = -c \cdot 2\pi A + c^3 U,$$

worin U wieder eine unbekannte Function von c und z^2 ist.

Wenn wir uns also damit begnügen wollen, die Potentialfunction bis auf ein Glied dritter Ordnung constant gemacht zu haben, so behalten wir für die Dichtigkeitsfunction Z die Formel:

$$(III.) \quad Z = A \left(1 + \frac{c}{a\pi} \cdot \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - z^2 \sin^2 \varphi} d\varphi}{1 - z^2} \right)$$

Das hierin vorkommende Integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - z^2 \sin^2 \varphi} d\varphi$

ist bekanntlich das vollständige elliptische Integral zweiter Gattung, und läßt sich daher nicht weiter reduciren, sondern muß als eine selbständige Transcendente in der Formel beibehalten werden.

Bei der ganzen Entwicklung dieser Formel wurde angenommen, daß der betrachtete Punkt P , für welchen die Potentialfunction bestimmt wurde, noch um ein gegen c großes Stück vom Rande entfernt liege, und nur für solche Punkte gilt daher auch diese Formel. In der That sieht man auch auf den ersten Blick, daß, wenn man unter Annahme der Gleichung (III.) für einen in der Nähe der Randes oder am Rande selbst gelegenen Punkt die Potentialfunction bestimmt, diese einen anderen Werth annimmt, als im Innern der Platte. Der Theil der Potentialfunction, welcher von dem ersten Gliede der Formel (III.) herstammt, nimmt nach dem Rande zu ab, und zwar bis etwa zur Hälfte seines sonstigen Werthes, weil man am Rande nach φ nicht von 0 bis 2π , sondern nur von 0 bis π integriren darf. Der von dem zweiten Gliede herstammende Theil dagegen nimmt wegen des Nenners $1 - z^2$ zu, und wird am Rande selbst sogar unendlich.

Wir wollen daher an dem zweiten Gliede der Formel (III.) noch eine Correction anbringen, welche den Werth der Potentialfunction im Innern der Platte nur um eine Gröfse von höherer als zweiter Ordnung ändert, und somit dort zu vernachlässigen ist, welche aber in der Nähe des Randes an Bedeutung gewinnt, und hier das unendlich werden des zweiten Theiles der Potentialfunction verhindert, und ihn nur so weit wachsen läßt, dafs dadurch die Abnahme des ersten Theiles ausgeglichen, und der Werth der ganzen Potentialfunction am Rande so nahe wie möglich mit dem Werthe im Innern der Platte in Uebereinstimmung gebracht wird.

Welcher Art diese Correction seyn mufs, werden wir am besten aus dem oben bestimmten Verhalten einer *einzelnen* kreisförmigen Platte erschen können, denn es ist wahrscheinlich, dafs jede der beiden sich gegenüberstehenden, und dadurch auf einander einwirkenden Platten sich nach dem Rande zu mehr und mehr dem Zustande einer allein stehenden Platte nähert. Bei der letzteren darf nämlich ebenfalls bei der Bestimmung der Potentialfunction am Rande die Integration nach φ nur von 0 bis π statt von 0 bis 2π geschehen, und dadurch würde nach dem Rande zu eine schnelle Abnahme ihres Werthes eintreten, wenn dieser Umstand nicht dadurch compensirt würde, dafs sich dort die Elektrizität so stark anhäuft, dafs ihre Dichtigkeit am Rande selbst sogar, wie die Formel (II.) zeigt, unendlich wird. Indem nun eine ähnliche Anhäufung der Elektrizität am Rande auch bei jeder der beiden jetzt von uns betrachteten Platten stattfindet, müssen die Theile der hier zusammengedrängten gleichartigen Elektrizität, wegen ihrer unmittelbaren Nähe, eine so grofse abstofsende Kraft auf einander ausüben, dafs dagegen die anziehende Kraft der eben so dichten ungleichartigen Elektrizität am Rande der anderen Platte in den Hintergrund tritt, weil diese sich in einer zwar geringen, aber doch angebbaren Entfernung c befindet. Es wird sich daher

die Elektrizität dicht am Rande beinahe ebenso anordnen, als ob die andere Platte gar nicht vorhanden wäre.

Nun haben wir bei der einzelnen Platte für Z den Ausdruck (II.) gefunden, welcher von der Form

$$\frac{C}{\sqrt{1-z^2}}$$

ist, wenn C eine Constante bedeutet, und diese Form muß Z auch in unserem jetzigen Falle in der Nähe des Randes annehmen. Um dieses zu erreichen, addiren wir im Nenner des zweiten Gliedes der Formel (III.) noch die GröÙe $b\sqrt{1-z^2}$ hinzu, worin b eine kleine Constante ist, deren Werth von c abhängt. Dadurch geht (III.) über in

$$(IV.) \quad Z = A \left(1 + \frac{c}{a\pi} \cdot \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-z^2 \sin^2 \varphi} d\varphi}{1-z^2 + b\sqrt{1-z^2}} \right).$$

Wenn nun die GröÙe z sich dem Werthe 1 nähert, so

nähert sich im zweiten Gliede der Zähler $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-z^2 \sin^2 \varphi} d\varphi$, wie bekannt, ebenfalls dem Werthe 1, und im Nenner nähern sich die beiden GröÙen $1-z^2$ und $b\sqrt{1-z^2}$ dem Werthe 0, doch so, daß man zuletzt $1-z^2$ gegen $b\sqrt{1-z^2}$ vernachlässigen kann, und dann heißt das ganze zweite Glied:

$$\frac{Ac}{a\pi} \cdot \frac{1}{b\sqrt{1-z^2}},$$

und da dieses Glied für $z=1$ unendlich wird, so kann man das erste constante Glied, welches im Innern der Platte das zweite bei Weitem übertrifft, hier am Rande gegen das zweite vernachlässigen, und es bleibt dann nur der zuletzt gefundene Ausdruck übrig, welcher mit dem vorher erwähnten bei einer einzelnen Platte geltenden Ausdrucke übereinstimmt.

Es kommt nun darauf an, die Constante b so zu bestimmen, daß die Potentialfunction für einen Punkt des Randes ebenfalls den im Innern der Platte geltenden Werth $-c2\pi A$ annimmt, wobei wir uns freilich, da wir nur über Eine Constante zu verfügen haben, darauf beschränken müssen, das Glied *erster* Ordnung mit diesem Werthe in Uebereinstimmung zu bringen. Wenn diese Uebereinstimmung für den Rand selbst hergestellt ist, so können wir annehmen, daß sie auch für die etwas vom Rande entfernten Punkte nicht aufhören, sondern im Gegentheile größer werden wird, da sie sich im Innern der Platte auch auf das Glied *zweiter* Ordnung erstreckt, indem dieses Null wird.

Da, wie wir früher gesehen haben, auf das in der Potentialfunction vorkommende Glied erster Ordnung nur die Theile der beiden Platten, welche sich in unmittelbarer Nähe des betrachteten Punktes befinden, Einfluß haben, indem die entfernteren Theile die Entwicklung der GröÙe $1 - \frac{c}{\sqrt{c^2 + x^2}}$ nach c gestatten, und diese Entwicklung mit $\frac{c^2}{2x^2}$ beginnt, so können wir für unsere jetzt beabsichtigte Rechnung, bei der es sich nur um dieses Glied erster Ordnung handelt, der Formel (IV.) eine einfachere Gestalt geben, nämlich diejenige, welche sie dicht am Rande näherungsweise annimmt.

In dem von z abhängigen Bruche des zweiten Gliedes ändern Zähler und Nenner in der Nähe von $z=1$ sehr schnell ihren Werth, indem beide mit wachsendem z abnehmen, indessen überwiegt der Einfluß, welchen die Veränderung des Nenners auf die Veränderung des ganzen Bruches ausübt, so sehr, daß man dagegen die Veränderung des Zählers vernachlässigen kann. Man sieht dieses besonders deutlich, wenn man statt des Bruches selbst seinen Logarithmus betrachtet, weil man bei diesem Zähler und Nenner trennen, und ihren Einfluß einzeln untersuchen kann, nämlich:

$$(24.) \quad \log \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-z^2 \sin^2 \varphi} d\varphi}{1-z^2+b\sqrt{1-z^2}} = \log \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-z^2 \sin^2 \varphi} d\varphi \right) - \log(1-z^2+b\sqrt{1-z^2}).$$

Diese beiden einzelnen Logarithmen des Zählers und des Nenners differentiire man nach z , dann erhält man aus dem ersten:

$$\frac{d \cdot \log \text{Zähler}}{dz} = \frac{1}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-z^2 \sin^2 \varphi} d\varphi} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-z \sin^2 \varphi d\varphi}{\sqrt{1-z^2 \sin^2 \varphi}},$$

wofür man auch schreiben kann:

$$(25.) \quad \frac{d \cdot \log \text{Zähler}}{dz} = \frac{1}{z} \left\{ 1 - \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-z^2 \sin^2 \varphi}}}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-z^2 \sin^2 \varphi}}} \right\}$$

wie man leicht sieht, wenn man beide Glieder der Klammer zuerst auf gleichen Nenner bringt, und dann die beiden dadurch in den Zähler kommenden Integrale unter Ein Integralzeichen vereinigt. Aus dem zweiten dagegen erhält man:

$$(26.) \quad \frac{d \cdot \log \text{Nenner}}{dz} = - \frac{z(2\sqrt{1-z^2}+b)}{(1-z^2)(\sqrt{1-z^2}+b)}.$$

Man braucht nun nur die Werthe, welche diese beiden Differentialcoefficienten in der Nähe von $z=1$ annehmen, unter einander zu vergleichen. Der Ausdruck (25.) wird

für $z=1$ unendlich, indem das Integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-z^2 \sin^2 \varphi}}$ unendlich wird, während das andere Integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-z^2 \sin^2 \varphi} d\varphi$

den Werth 1 annimmt. Dessungeachtet kann man diesen Ausdruck gegen den Ausdruck (26.), welcher ebenfalls unendlich wird, vernachlässigen, was man am besten daran sieht, dafs, wenn man beide mit $\sqrt{1-z^2}$ multiplicirt, dadurch der erstere zu Null wird, während der letztere unendlich bleibt.

Wir wollen daher für diese Rechnung den Zähler jenes Bruches $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-z^2 \sin^2 \varphi} d\varphi$ als constant $= 1$, und nur den Nenner als veränderlich betrachten, und auch in diesem können wir noch eine Vereinfachung vornehmen. Es ist nämlich

$$1 - z^2 + b\sqrt{1-z^2} = (1+z) \left(1 - z + \frac{b}{\sqrt{1+z}} \sqrt{1-z} \right),$$

und hierin können wir unbedenklich $1+z=2$ setzen. Dadurch geht (IV.) über in

$$Z = A \left(1 + \frac{c}{2a\pi} \cdot \frac{1}{1 - z + \frac{b}{\sqrt{2}} \sqrt{1-z}} \right)$$

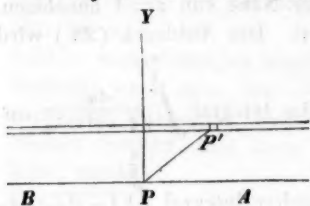
oder wenn wir noch zur Abkürzung setzen:

$$(27.) \quad \begin{cases} 1 - z = \frac{y}{a} \\ \frac{b\sqrt{a}}{\sqrt{2}} = \beta \end{cases}$$

wobei y den Abstand des Punktes, für welchen z galt, vom Rande der Platte bedeutet, so kommt:

$$(28.) \quad Z = A \left(1 + \frac{c}{2\pi} \cdot \frac{1}{y + \beta \sqrt{y}} \right).$$

Es sey nun P in nebenstehender Figur der Punkt für welchen die Potentialfunction bestimmt werden soll, und AB ein Stück des Randes der Platte. Den letzteren nehmen wir für so weit, wie er hier in Betracht kommt, als geradlinig an,



indem sich leicht nachweisen läßt, daß durch diese Vernachlässigung der wirklich stattfindenden Krümmung nur ein Fehler von der zwischen der ersten und zweiten liegenden Ordnung $\left(\frac{c}{a}\right)^2 \log \frac{c}{a}$ entsteht. Demnach erhalten wir, wie man sogleich übersieht, für die Potentialfunction folgenden Ausdruck:

$$(29.) \quad V = - \int_0^{y_0} \int_{-x_0}^{+x_0} Z \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{1}{\sqrt{c^2 + x^2 + y^2}} \right) dx dy$$

worin x_0 und y_0 bei dem hier beabsichtigten Grade von Genauigkeit zwei gegen c grofse, sonst aber beliebige Werthe sind.

Die Integration nach x , d. h. für einen unendlich schmalen mit dem Rande parallelen Streifen, wie er auf der Figur angedeutet ist, können wir sogleich ausführen, da Z von x unabhängig ist. Wir erhalten dann:

$$V = - \int_0^{y_0} Z \left(\log \frac{c^2 + y^2}{y^2} - 2 \log \frac{x_0 + \sqrt{c^2 + y^2 + x_0^2}}{x_0 + \sqrt{y^2 + x_0^2}} \right) dy$$

oder, da wir das zweite unter dem Integralzeichen befindliche Glied, welches für jeden Werth von y in Bezug auf c von der zweiten Ordnung ist, vernachlässigen können:

$$(30.) \quad V = - \int_0^{y_0} Z \cdot \log \frac{c^2 + y^2}{y^2} \cdot dy.$$

Bei der Integration nach y trennen wir die beiden Glieder, aus welchen Z (Formel 28.) besteht, von einander, und bezeichnen die beiden Theile, in welche V dadurch zerfällt mit V_1 und V_2 . Dann ist der erste Theil:

$$V_1 = - A \int_0^{y_0} \log \frac{c^2 + y^2}{y^2} \cdot dy.$$

und das giebt, wenn man nur das Glied erster Ordnung berücksichtigt:

$$(31.) \quad V_1 = - c \cdot \pi A + \text{etc.},$$

ein Resultat, welches man bei der gegenwärtigen Gestalt des Integrals durch eine Reihenentwicklung erhält, welches sich aber unmittelbar in geschlossener Form ergeben hätte, wenn man statt der rechtwinklichen Coordinaten Polarcoordinaten um P eingeführt hätte.

Der zweite Theil dagegen ist:

$$V_2 = -c \cdot \frac{A}{2\pi} \int_0^{\gamma_0} \frac{dy}{y + \beta \sqrt{y}} \log \frac{c^2 + y^2}{y^2},$$

und dieser Ausdruck nimmt, da

$$\frac{dy}{y + \beta \sqrt{y}} = \frac{dy}{\sqrt{y}(\sqrt{y} + \beta)} = 2 \frac{d(\sqrt{y})}{\sqrt{y} + \beta}$$

ist, durch die Einführung der Zeichen

$$(32.) \quad \sqrt{y} = \eta \text{ und } \sqrt{c} = \gamma$$

folgende etwas einfachere Gestalt an:

$$(33.) \quad V_2 = -c \cdot \frac{A}{\pi} \int_0^{\eta_0} \frac{d\eta}{\eta + \beta} \log \frac{\eta^4 + \gamma^4}{\eta^4}.$$

Diese Integration macht einige Weitläufigkeiten. Man muß nämlich auch hier zu Reihenentwickelungen schreiten, und damit diese Reihen immer convergirend bleiben, muß man, nachdem man sich vorläufig überzeugt hat, daß β jedenfalls kleiner als γ ist, die Integration statt des ganzen Intervalles von 0 bis η_0 einzeln für die drei Intervalle von 0 bis β , von β bis γ und von γ bis η_0 ausführen. Da indessen diese Ausrechnung theoretisch ohne Interesse ist, so will ich hier nur das Resultat derselben mittheilen. Man erhält nämlich, wenn man noch zur Abkürzung

$$(34.) \quad \frac{\beta}{\gamma} = \alpha$$

setzt, folgenden Ausdruck, den ich, damit man das Fortschritzungsgesetz deutlich erkennt, etwas weiter ausschreiben will, als es für unsere Rechnung eigentlich nothwendig wäre:

$$\begin{aligned}
 (35.) \quad V_2 = & -c \cdot \frac{8A}{\pi} \left\{ 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \text{etc.} + \frac{1}{4} (\log \alpha)^2 \right. \\
 & - \frac{1}{8} \log \alpha \cdot \log(1 + \alpha^4) \\
 & - \frac{1}{2} \left(\alpha - \frac{\alpha^2}{2^2} + \frac{\alpha^3}{3^2} - \frac{\alpha^4}{4^2} + \text{etc.} \right) \\
 & + \left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{8^2} + \frac{1}{12^2} - \text{etc.} \right) \\
 & - \alpha \left(\frac{1}{3 \cdot 5} - \frac{1}{7 \cdot 9} + \frac{1}{11 \cdot 13} - \text{etc.} \right) \\
 & + \alpha^2 \left(\frac{1}{2 \cdot 6} - \frac{1}{6 \cdot 10} + \frac{1}{10 \cdot 14} - \text{etc.} \right) \\
 & - \alpha^3 \left(\frac{1}{1 \cdot 7} - \frac{1}{5 \cdot 11} + \frac{1}{9 \cdot 15} - \text{etc.} \right) \\
 & + \alpha^4 \left(\frac{1}{8^2} - \frac{1}{4 \cdot 12} + \frac{1}{8 \cdot 16} - \text{etc.} \right) \\
 & - \alpha^5 \left(-\frac{1}{1 \cdot 9} - \frac{1}{3 \cdot 11} + \frac{1}{7 \cdot 17} - \text{etc.} \right) \\
 & + \alpha^6 \left(-\frac{1}{2 \cdot 10} - \frac{1}{2 \cdot 14} + \frac{1}{6 \cdot 18} - \text{etc.} \right) \\
 & - \alpha^7 \left(-\frac{1}{3 \cdot 11} - \frac{1}{1 \cdot 15} + \frac{1}{5 \cdot 19} - \text{etc.} \right) \\
 & + \alpha^8 \left(-\frac{1}{4 \cdot 12} - \frac{1}{16^2} + \frac{1}{4 \cdot 20} - \text{etc.} \right) \\
 & \left. - \alpha^9 \left(-\frac{1}{5 \cdot 13} + \frac{1}{1 \cdot 17} + \frac{1}{3 \cdot 21} - \text{etc.} \right) + \text{etc.} \right\}
 \end{aligned}$$

Dieses giebt durch Summation der einzelnen Reihen:

$$\begin{aligned}
 (36.) \quad V_2 = & -c \cdot \frac{A}{\pi} \left\{ \frac{17}{24} \pi^2 + 2 (\log \alpha)^2 - \log \alpha \cdot \log(1 + \alpha^4) \right. \\
 & - 4,4429 \alpha + 1,5708 \alpha^2 - 1,4809 \alpha^3 + 0,25 \alpha^4 \\
 & \left. + 0,8881 \alpha^5 - 0,5226 \alpha^6 + 0,6332 \alpha^7 - \text{etc.} \right\}
 \end{aligned}$$

Wenn man nun die beiden in (31.) und (36.) gegebenen Ausdrücke in die Bedingungsgleichung

$$(37.) \quad V = V_1 + V_2 = -c \cdot 2\pi A$$

einsetzt, so erhält man die Gleichung, aus welcher α bestimmt werden muß. Man kann bei dieser Bestimmung zuerst alle von α abhängigen Glieder, mit Ausnahme des

ersten, nämlich $2(\log \alpha)^2$, vernachlässigen, und aus diesem Gliede allein einen rohen Näherungswerth von α ableiten, welcher mit α_1 bezeichnet werde. Dann setze man $\alpha = \alpha_1 + \delta_1$, entwickle die ganze Gleichung nach δ_1 , aber nur bis zur ersten Potenz, und bestimme daraus δ_1 . Wenn man so den zweiten Näherungswerth $\alpha_2 = \alpha_1 + \delta_1$ gefunden hat, setze man wieder $\alpha = \alpha_2 + \delta_2$, und bestimme auf dieselbe Weise δ_2 u. s. f. bis man den hinlänglichen Grad von Genauigkeit erreicht hat.

Ich habe auf diese Weise erhalten:

$$(38.) \quad \alpha = 0,247$$

und daraus ergibt sich zufolge der in (27.), (32.) und (34.) eingeführten Bezeichnungen

$$(39.) \quad b = \beta \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a}} = \alpha \sqrt{2} \sqrt{\frac{c}{a}} = 0,350 \sqrt{\frac{c}{a}}.$$

Indem wir diesen Werth für b einsetzen, nimmt die Gleichung (IV.) folgende bestimmtere Form an:

$$(V.) \quad Z = A \left\{ 1 + \frac{c}{a\pi} \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-z^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi}{1-z^2+0,35 \cdot \sqrt{\frac{c}{a}} \sqrt{1-z^2}} \right\}.$$

Es bleibt nun nur noch übrig, den Werth der Constanten A zu bestimmen. Die dazu vorhandenen Data können je nach der Natur der Aufgabe verschiedener Art seyn. Wir wollen hier zwei Fälle betrachten, welche am häufigsten vorkommen.

Erstens kann die mit Q bezeichnete Quantität der Electricität, mit welcher jede der beiden Platten geladen ist, bekannt seyn. Um alsdann die zur Bestimmung von A nöthigen Gleichungen zu gewinnen, brauchen wir nur aus der vorstehenden Formel von Z durch Integration den Ausdruck für die auf der einen Platte befindliche Elektrizitätsmenge abzuleiten, und diesen dann gleich Q zu setzen. Wir wollen in diesem Ausdrücke aber ebenso, wie es in Z

selbst geschehen ist, alle Größen, die in Bezug auf c von höherer als erster Ordnung sind, vernachlässigen.

Sey der Mittelpunkt der Platte zum Mittelpunkte von Polarcoordinaten r und ψ gewählt, und wie früher $r = az$ gesetzt, so ist:

$$(40.) \quad Q = a^2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 Z \cdot z \, dz \, d\psi = a^2 \cdot 2\pi \int_0^1 Z \cdot z \, dz.$$

Wir trennen nun wieder die GröÙe Z in ihre beiden Glieder, und bezeichnen die ihnen entsprechenden Theile von Q mit Q_1 und Q_2 , dann hat man sogleich:

$$(41.) \quad Q_1 = a^2 \cdot 2\pi \int_0^1 A z \, dz = a^2 \pi \cdot A.$$

Etwas weitläufiger ist die Bestimmung des anderen Theiles, nämlich:

$$(42.) \quad Q_2 = c \cdot 2a \cdot A \int_0^1 \frac{z \, dz \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - z^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi}{1 - z^2 + b \sqrt{1 - z^2}}.$$

Hierin führen wir zunächst zur Abkürzung für das Integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{z \, dz \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - z^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi}{1 - z^2 + b \sqrt{1 - z^2}}$ den gewöhnlich dafür angewandten Buchstaben E ein, und setzen ferner:

$$(43.) \quad \sqrt{1 - z^2} = z' \text{ und daher } \frac{z \, dz}{\sqrt{1 - z^2}} = -dz',$$

dann geht (42.) über in:

$$(44.) \quad Q_2 = c \cdot 2a \cdot A \int_0^1 \frac{E}{z' + b} \, dz',$$

worin die Gränzen, welche für die neue Veränderliche eigentlich von 1 bis 0 gehen sollten, wieder von 0 bis 1 gesetzt sind, aber dafür auch das vor dz' stehende Minuszeichen in das Pluszeichen verwandelt ist. Auf das hierin vorkommende Integral wenden wir folgende Zerlegung an:

$$(45.) \int_0^1 \frac{E}{z'+b} dz' = \int_0^1 \frac{dz'}{z'+b} + \int_0^1 \frac{E-1}{z'} dz' - b \int_0^1 \frac{E-1}{z'^2+bz'} dz',$$

von deren Richtigkeit man sich leicht überzeugen kann, wenn man die auf der rechten Seite stehenden Glieder wieder unter Ein Integralzeichen und dann auf gemeinsamen Nenner bringt. Diese drei Glieder müssen wir nun einzeln behandeln.

Das erste giebt:

$$\int_0^1 \frac{dz'}{z'+b} = \log(1+b) - \log b,$$

wofür man auch einfach

$$(46.) \int_0^1 \frac{dz'}{z'+b} = -\log b$$

setzen kann, denn die Gröfse $\log(1+b)$ läfst sich durch die Reihe $b\left(1 - \frac{b}{2} + \frac{b^2}{3} - \text{etc.}\right)$ darstellen, und ist also mit dem in b steckenden Factor \sqrt{c} behaftet, und da die Gröfse Q_2 außerdem schon den Factor c enthält, so ist das aus $\log(1+b)$ entstehende Glied in Bezug auf c von höherer als erster Ordnung, und kann daher vernachlässigt werden.

Wir betrachten nun das zweite in (45.) vorkommende Glied:

$$\int_0^1 \frac{E-1}{z'} dz'.$$

Hierin entwickeln wir zunächst den Differentialausdruck nach der von Jacobi¹⁾ eingeführten Gröfse q . Es ist nämlich:

$$z' = \left(\frac{1-2q+2q^4-2q^9+\dots}{1+2q+2q^4+2q^9+\dots} \right)^2 \quad 2)$$

und:

1) *Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum*. p. 85.

2) A. a. O. S. 184.

und:

$$E = K - \frac{2\pi^2}{K} \cdot A^{-1}$$

worin

$$K = \frac{\pi}{2} (1 + 2q + 2q^3 + 2q^9 + \dots)^2$$

$$A = \frac{q - 4q^4 + 9q^9 - 16q^{16} + \dots}{1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \dots}$$

ist; und daraus ergibt sich:

$$(47.) \quad \frac{E-1}{z'} dz' = -dq [4\pi(1 - 4q + 24q^2 - 80q^3 + 250q^4 - 672q^5 + 1680q^6 - \text{etc.}) - 8(1 + 4q^2 + 6q^4 + 8q^6 + \text{etc.})].$$

Die Gröfse q nimmt, während z' von 0 bis 1 wächst, von 1 bis 0 ab; doch geschieht diese Abnahme nicht gleichförmig wie z' wächst, sondern zu Anfang sehr schnell, und dann langsamer. Daher sind, wenn z' noch weit von 1 entfernt ist, doch die entsprechenden Werthe von q schon sehr klein, und dadurch wird die vorstehende Reihe hinlänglich convergirend. Für die nahe an 0 liegenden Werthe von z' ist sie jedoch nicht anwendbar, und es möge der kleinste Werth von z' , bis zu welchem hin wir sie anwenden wollen, z'_1 , heißen. Dann theilen wir das zu bestimmende Integral in zwei Theile, nämlich:

$$\int_0^1 \frac{E-1}{z'} dz' = \int_0^{z'_1} \frac{E-1}{z'} dz' + \int_{z'_1}^1 \frac{E-1}{z'} dz'$$

und müssen nun für den ersten dieser beiden Theile eine andere Entwicklung machen. Dazu wenden wir statt q die Complementargröfse q' an, welche zu q in folgender Relation steht:

$$(48.) \quad \log q \cdot \log q' = \pi^2.$$

Alsdann ist:

$$z' = 4 \sqrt[3]{q} \left(\frac{1 + q'^{1/2} + q'^{3/2} + q'^{5/2} + \dots}{1 + 2q' + 2q'^4 + 2q'^9 + \dots} \right)^2$$

1) A. a. O. S. 111.

2) A. a. O. S. 184.

und:

$$E = \frac{\pi}{2K'} (1 - 4 \log q' \cdot A')$$

worin K' und A' dieselben Größen in q' sind, wie K und A in q . Daraus ergibt sich:

$$(49.) \quad \frac{E-1}{z'} dz' = 2dq' [-(1-10q'+48q'^2-164q'^3 + \text{etc.}) \log q' - 1 + 11q' - 56q'^2 + 187q'^3 - \text{etc.}]$$

eine Reihe, welche für kleine Werthe von z' stark convergirt, denn die Größe q' wächst mit z' zugleich von 0 bis 1, doch so, daß während z' gleichmäßig zunimmt, q' sich zuerst sehr langsam von 0 entfernt, und erst wenn z' die Gränze 1 beinahe schon erreicht hat, das noch übrige Intervall bis 1 schnell durchläuft.

Seyen nun q_1 und q'_1 die zu z_1 gehörigen Werthe von q und q' , so muß der Ausdruck (49.) von 0 bis q'_1 und der Ausdruck (47.) von q_1 bis 0 integrirt werden. Das giebt:

$$(50.) \quad \int_0^{z'_1} \frac{E-1}{z'} dz' = -2(q'_1 - 5q'^2_1 + 16q'^3_1 - 41q'^4_1 + \text{etc.}) \log q'_1 + 6q'^2_1 - \frac{80}{3}q'^3_1 + 73q'^4_1 - \text{etc.}$$

$$(51.) \quad \int_{z'_1}^1 \frac{E-1}{z'} dz' = 4\pi(q_1 - 2q^2_1 + 8q^3_1 - 20q^4_1 + 50q^5_1 - 112q^6_1 + 240q^7_1 - \text{etc.}) - 8(q_1 + \frac{4}{3}q^2_1 + \frac{6}{5}q^3_1 + \frac{8}{7}q^4_1 + \text{etc.})$$

Wählen wir nun zur numerischen Berechnung den Werth z' , z. B. so, daß

$$q_1 = \frac{1}{10}$$

wird, so wird nach Gleichung (48.):

$$q'_1 = \frac{1}{72.7} = 0,013756$$

und mittelst dieser Werthe, bei welchen beide Reihen schnell convergiren, erhält man:

$$\int_0^{z'_1} \frac{E-1}{z'} dz' = 0,11122$$

$$\int_{z'_1}^1 \frac{E-1}{z'} dz' = 0,27507$$

und somit:

$$(52.) \int_0^1 \frac{E-1}{z'} dz' = 0,3863.$$

Wir haben nun endlich das dritte Integral der Gleichung (45.) zu betrachten. Vor diesem steht der Factor b , und es bildet daher, ebenso, wie es von $\log(1+b)$ erwähnt wurde, in Q_2 ein Glied von höherer als erster Ordnung in Bezug auf c , und kann somit vernachlässigt werden. Bevor wir es aber verwerfen, müssen wir nachweisen, daß der Werth des Integrals allein nicht unendlich oder mit $\frac{1}{b}$ vergleichbar ist, denn in beiden Fällen

würde die durch den Factor b angedeutete Ordnung des Gliedes illusorisch seyn, und auf den ersten Blick kann man allerdings wohl einen solchen Argwohn schöpfen, da der Nenner aus den Factoren z' und $z'+b$ besteht, welche für die untere Gränze des Integrals in 0 und b übergehen.

Um nachzuweisen, daß dieser für einen einzelnen Werth von z' stattfindende Umstand nicht auch auf das ganze Integral eine solche Wirkung ausübt, wollen wir den Nenner noch kleiner annehmen, als er wirklich ist, indem wir statt $z'^2 + bz'$ nur z'^2 beibehalten, und also statt jenes Integrals setzen:

$$\int \frac{E-1}{z'^2} dz'.$$

Hierin brauchen wir die Integration nach z' nur von 0 bis zu irgend einem Werthe z'_1 , welcher als nicht sehr klein angenommen wird, auszuführen, denn von den größeren Werthen von z' versteht es sich von selbst, daß sie das Integral nicht unendlich machen können. Nun ist nach den obigen Gleichungen

$$\frac{E-1}{z'^2} dz' = \frac{dq'}{2} \left[-(q'^{-\frac{1}{2}} - 6q'^{\frac{1}{2}} + 10q'^{\frac{3}{2}} - \text{etc.}) \log q' - q'^{-\frac{1}{2}} + 7q'^{\frac{1}{2}} - 14q'^{\frac{3}{2}} - \text{etc.} \right]$$

und somit erhält man, wenn q_1 den zu z_1 gehörigen Werth von q' bedeutet:

$$(53.) \int_0^{z_1} \frac{E-1}{z'^2} dz' = -(q_1^{\frac{1}{2}} - 2q_1^{\frac{3}{2}} + 2q_1^{\frac{5}{2}} - \text{etc.}) \log q_1 + q_1^{\frac{1}{2}} + q_1^{\frac{3}{2}} - 2q_1^{\frac{5}{2}} - \text{etc.}$$

Dieser Ausdruck zeigt, dass das Integral in seiner jetzigen Form nicht unendlich wird, sondern einen mäßigen Werth behält, und somit kann es auch, wenn man ihm wieder seine alte Form giebt, die es in (45.) hatte, indem man im Nenner $z'^2 + bz'$ statt z'^2 setzt, keinen mit $\frac{1}{b}$ vergleichbaren Werth annehmen.

Setzen wir nun die Werthe (46.) und (52.) in (45.) ein, so kommt:

$$(54.) \int_0^1 \frac{E}{z' + b} dz' = -\log b + 0,3863,$$

und dadurch geht die Gleichung (44.) über in:

$$Q_2 = c \cdot 2aA (-\log b + 0,3863),$$

oder, da nach (39.) $b = 0,350 \sqrt{\frac{c}{a}}$ ist, in:

$$Q_2 = c \cdot 2aA \left[-\log \left(0,350 \sqrt{\frac{c}{a}} \right) + 0,3863 \right] \\ = c \cdot aA \left(\log \frac{a}{c} + 2,872 \right)$$

$$(55.) = c \cdot aA \log \frac{17,68a}{c}.$$

Wenn man diesen Ausdruck von Q_2 zu dem in (41.) gegebenen von Q_1 addirt, und statt der Summe $Q_1 + Q_2$ wieder Q setzt, so entsteht die Gleichung:

$$(VI.) Q = A \cdot a^\pi \pi \left(1 + \frac{c}{a\pi} \log \frac{17,68a}{c} \right)$$

und hieraus ergibt sich endlich der gesuchte Ausdruck für A , nämlich:

$$A = \frac{Q}{a^2 \pi \left(1 + \frac{c}{a \pi} \log \frac{17,68 a}{c}\right)}$$

oder:

$$(VII.) \quad A = \frac{Q}{a^2 \pi} \left(1 - \frac{c}{a \pi} \log \frac{17,68 a}{c}\right).$$

Zweitens kann zur Bestimmung von A der Zustand derjenigen Conductoren, von welchen die Platten ihre Elektricität empfangen haben, bekannt seyn. In unserem Falle z. B., wo beide Platten gleich stark positiv und negativ elektrisch sind, können wir annehmen, daß sie zur Ladung mit zwei Conductoren von gleicher aber entgegengesetzter Spannung in Verbindung gesetzt seyen. Dabei soll entweder vorausgesetzt werden, daß die Conductoren durch irgend welche Elektricitätsquellen in constantem Zustande erhalten werden, oder daß der Schluszzustand nach geschehener Ladung der Platten gegeben sey. Ferner wollen wir die Conductoren als so weit von den Platten entfernt annehmen, daß sie keinen inducirenden Einfluß auf dieselben ausüben, und auch von dem inducirenden Einflusse des Zuleitungsdrathes wollen wir absehen.

Nun ist es ein bekannter Satz, daß, wenn mehrere leitende Körper in Verbindung sind, das elektrische Gleichgewicht sich so herstellt, daß die Potentialfunction im Innern des ganzen Systems überall denselben Werth hat. Sey daher in dem positiven Conductor der Werth der Potentialfunction durch V dargestellt, welche GröÙe hier, wie in vielen Fällen, als das geeignetste Maas dessen zu betrachten ist, was man gewöhnlich mit dem etwas unbestimmten Ausdrucke Spannung bezeichnet, so gilt derselbe Werth auch für die positive Platte, und wir haben daher nach Gleichung (23.):

$$(VIII.) \quad V = -c.2\pi A$$

und somit:

$$(IX.) \quad A = -\frac{V}{c \cdot 2\pi},$$

und zugleich ergibt sich, wenn man diesen Ausdruck in (VI.) für A einsetzt, folgende Beziehung zwischen Q und V :

$$(X.) \quad Q = -\frac{V \cdot a^2}{2c} \left(1 + \frac{c}{a\pi} \log \frac{17,68a}{c}\right).$$

Bei allen bisherigen Betrachtungen wurde angenommen, daß die beiden Platten mit gleichen Mengen entgegengesetzter Elektricität geladen seyen, oder daß die Potentialfunction in den beiden ladenden Conductoren gleiche und entgegengesetzte Werthe habe. In der Praxis geschieht aber, wie schon erwähnt, die Ladung in der Regel so, daß nur die Eine Platte mit einem Conductor, die andere dagegen mit der Erde in Verbindung gesetzt wird. Hierbei können wir die Erde ebenfalls als einen Conductor betrachten, in welchem die Potentialfunction den Werth Null hat, und wir wollen daher die Bedingung gleich allgemeiner so stellen, daß die ladenden Conductoren irgend welche verschiedene Werthe der Potentialfunction haben, oder daß die Platten mit verschiedenen Elektricitätsmengen geladen seyen.

Um für alle diese Fälle die Anordnung der Elektricität sogleich bestimmen zu können, genügt es, wenn wir neben dem bisher betrachteten nur noch Einen Fall untersuchen, nämlich den, wo die beiden Platten mit gleichen Mengen gleichartiger Elektricität geladen sind. Wissen wir nämlich, in welcher Weise sich die entgegengesetzten Mengen Q und $-Q$, und die gleichartigen Mengen Q' und Q' , jedes System für sich allein, auf den beiden Platten in das Gleichgewicht setzen, so können wir sicher seyn, daß das Gleichgewicht auch fortbesteht, wenn sich die beiden Systeme mit derselben Anordnung, welche sie vorher einzeln hatten, auf den Platten gleichzeitig übereinander lagern; und aus zwei solchen Systemen können wir jedes andere System zusammensetzen.

Um nun die Anordnung der beiden gleichen und gleich-

artigen Elektricitätsmengen Q' und Q' auf den beiden Platten zu bestimmen, gehen wir von dem Gränzfalle aus, wo der Abstand c der beiden Platten Null ist. Dann können wir sie als Eine Platte mit der Quantität $2Q'$ betrachten, und haben daher nach Gleichung (II.) für die gesammte Dichtigkeit den Ausdruck:

$$\frac{Q'}{a^2 \pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

und nach (II.) für die Potentialfunction:

$$-\frac{Q' \pi}{a}.$$

Von dem ersteren Ausdrücke kommt auf jede einzelne Platte die Hälfte, der letztere gilt für jede einzelne Platte ganz.

Wenn sich nun die Platten etwas von einander entfernen, so daß c einen angebbaren Werth erhält, so ändert sich auch die Anordnung der Elektricität, aber diese Aenderung der Dichtigkeit ist im Verhältnisse zur ganzen Dichtigkeit im Allgemeinen von der Ordnung $\frac{c}{a}$, und wird nur in unmittelbarer Nähe des Randes von größerer Bedeutung. Da außerdem, wie bald gezeigt werden soll, bei der gewöhnlichen Art der Ladung die ganze Gröfse Q' im Verhältnisse zu Q auch schon von der Ordnung $\frac{c}{a}$ ist, so ist jene Aenderung dabei im Verhältnisse zur Dichtigkeit der Quantität Q von der Ordnung $\left(\frac{c}{a}\right)^2$, und wir wollen sie daher vernachlässigen, und die Anordnung der Elektricität und den Werth der Potentialfunction so annehmen, wie sie für $c=0$ stattfinden würden.

Dann können wir den obigen Gleichungen (V.) bis (X.) entsprechend für dieses zweite System die folgenden Gleichungen bilden:

$$(V') \quad Z' = A' \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(VI') \quad Q' = A' \cdot 2a^2 \pi$$

$$(VII.) \quad A' = \frac{Q'}{2a^2\pi}$$

$$(VIII.) \quad V' = -A' \cdot 2a\pi^2$$

$$(IX.) \quad A' = -\frac{V'}{2a\pi^2}$$

$$(X.) \quad Q' = -V' \cdot \frac{a}{\pi}.$$

Denken wir uns nun diese beiden Systeme auf einander gelegt, und bezeichnen die dadurch auf den beiden Platten entstehenden Dichtigkeiten respective mit Z_1 und Z_2 , so haben wir:

$$Z_1 = Z + Z' \text{ und } Z_2 = -Z + Z'$$

oder:

$$(XI.) \quad \begin{cases} Z_1 = A \left\{ 1 + \frac{c}{a\pi} \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-x^2 \sin^2 \varphi} d\varphi}{1-x^2+0,35 \sqrt{\frac{c}{a}} \sqrt{1-x^2}} \right\} + A' \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ Z_2 = -A \left\{ 1 + \frac{c}{a\pi} \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-x^2 \sin^2 \varphi} d\varphi}{1-x^2+0,35 \sqrt{\frac{c}{a}} \sqrt{1-x^2}} \right\} + A' \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \end{cases}$$

worin A und A' nach den Bedingungen der Aufgabe bestimmt werden müssen.

Unter den Gröſſen, welche durch die Bedingungen der Aufgabe explicite oder implicate gegeben seyn, und zur Bestimmung von A und A' angewandt werden können, sind besonders folgende vier hervorzuheben. Erstens die auf den beiden Platten befindlichen *Elektricitätsmengen*, welche wir M und N nennen wollen, und von welchen wir hier voraussetzen müssen, daß N nahe $= -M$ sey, so daß die Summe $M+N$ gegen M und N selbst eine Gröſſe von der Ordnung $\frac{c}{a}$ bilde. Zweitens die für die beiden Platten geltenden *Werthe für die Potentialfunction*, welche F und G heißen mögen. Diese können, wie schon oben erwähnt

wurde, dadurch gegeben seyn, daß der elektrische Zustand der Conductoren, von welchen die Platten ihre Electricität empfangen haben, bekannt ist.

Diese vier Größen stehen zu den vorher betrachteten Q , Q' , V und V' in folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned} M &= Q + Q', & F &= V + V', \\ N &= -Q + Q', & G &= -V + V', \end{aligned}$$

oder:

$$(56.) \quad Q = \frac{M-N}{2}, \quad V = \frac{F-G}{2}$$

$$(56'.) \quad Q' = \frac{M+N}{2}, \quad V' = \frac{F+G}{2}.$$

Setzt man die Ausdrücke (56.) in (VI.) und (VIII.) ein, und eliminirt dann A , und verfährt man ebenso mit den Ausdrücken (56'.) und den Gleichungen (VI.) und (VIII'), so erhält man folgende zwei Gleichungen zwischen M , N , F und G :

$$(XII.) \quad F - G = -\frac{2c}{a^2} \left(1 - \frac{c}{a\pi} \log \frac{17,68a}{c}\right) (M - N)$$

$$XIII.) \quad F + G = -\frac{\pi}{a} (M + N).$$

Mittelst dieser Gleichungen kann man, wenn zwei der Größen gegeben sind, die übrigen leicht bestimmen. Schreibt man dabei statt $\log \frac{17,68a}{c}$ zur Abkürzung bloß \log , so kommt:

$$(57.) \quad \begin{cases} F = -\frac{\pi}{a} \left[(M - N) \frac{c}{a\pi} \left(1 - \frac{c}{a\pi} \log\right) + \frac{M + N}{2} \right] \\ G = \frac{\pi}{a} \left[(M - N) \frac{c}{a\pi} \left(1 - \frac{c}{a\pi} \log\right) - \frac{M + N}{2} \right] \end{cases}$$

$$(58.) \quad \begin{cases} M = \frac{a}{\pi} \left[\frac{G - F}{4} \cdot \frac{a\pi}{c} \left(1 + \frac{c}{a\pi} \log\right) - \frac{G + F}{2} \right] \\ N = -\frac{a}{\pi} \left[\frac{G - F}{4} \cdot \frac{a\pi}{c} \left(1 + \frac{c}{a\pi} \log\right) + \frac{G + F}{2} \right] \end{cases}$$

$$(59.) \quad \begin{cases} N = -M - \frac{2a}{\pi} F - \frac{4c}{\pi} \left(\frac{M}{a} + \frac{F}{\pi}\right) \left[1 - \frac{c}{a\pi} (\log - 2)\right] \\ G = F + \frac{4c}{a} \left(\frac{M}{a} + \frac{F}{\pi}\right) \left[1 - \frac{c}{a\pi} (\log - 2)\right] \end{cases}$$

$$(60.) \quad \begin{cases} M = -N - \frac{2a}{\pi} G - \frac{4c}{\pi} \left(\frac{N}{a} + \frac{G}{\pi} \right) \left[1 - \frac{c}{a\pi} (\log - 2) \right] \\ F = G + \frac{4c}{a} \left(\frac{N}{a} + \frac{G}{\pi} \right) \left[1 - \frac{c}{a\pi} (\log - 2) \right] \end{cases}$$

$$(61.) \quad \begin{cases} N = -M - \frac{2a}{\pi} G + \frac{4c}{\pi} \left(\frac{M}{a} + \frac{G}{\pi} \right) \left[1 - \frac{c}{a\pi} (\log + 2) \right] \\ F = G - \frac{4c}{a} \left(\frac{M}{a} + \frac{G}{\pi} \right) \left[1 - \frac{c}{a\pi} (\log + 2) \right] \end{cases}$$

$$(62.) \quad \begin{cases} M = -N - \frac{2a}{\pi} F + \frac{4c}{\pi} \left(\frac{N}{a} + \frac{F}{\pi} \right) \left[1 - \frac{c}{a\pi} (\log + 2) \right] \\ G = F - \frac{4c}{a} \left(\frac{N}{a} + \frac{F}{\pi} \right) \left[1 - \frac{c}{a\pi} (\log + 2) \right] \end{cases}$$

Wenn so die Größen M , N , F und G bekannt sind so sind es mit ihnen zugleich nach (56.) und (56'.) auch Q , Q' , V und V' , und durch Substitution der letztern in (VII.) und (VII'.) oder (IX.) und (IX'.) ergeben sich A und A' .

Als specielle Anwendung dieser Ausdrücke wollen wir das gewöhnliche Ladungsverfahren betrachten, wobei *die eine Platte mit der Erde in Verbindung gesetzt wird*. Dann haben wir zunächst, wie auch die Ladung der andern Platte geschehen mag:

$$G = -V + V' = 0$$

und daher nach (VIII) und (VIII'):

$$(63.) \quad \frac{A'}{A} = \frac{c}{a\pi}.$$

Es zeigt sich also, dafs für diese Ladungsart wirklich A' gegen A von der Ordnung $\frac{c}{a}$ ist, und dasselbe mufs dann natürlich auch in Bezug auf die Quantitäten Q' und Q stattfinden, und somit ist die für die Gültigkeit der Gleichungen (V'.) bis (X'.) nothwendige Bedingung erfüllt.

Aufser der Gröfse G mufs nun noch eine der drei andern Gröfsen gegeben seyn.

1) Es sey F gegeben, indem etwa der elektrische Zustand des ladenden Conductors bekannt sey. Dann kommt nach (57.):

$$(64.) \quad \begin{cases} M = -\frac{a^2}{4c} \cdot F \cdot \left[1 + \frac{c}{a\pi} (\log + 2)\right] \\ N = \frac{a^2}{4c} F \left[1 + \frac{c}{a\pi} (\log - 2)\right]. \end{cases}$$

Die Elektricitätsmenge m , welche eine der Platten für sich allein von demselben Conductor aufnehmen würde, ist dagegen nach (11.):

$$(65.) \quad m = -\frac{2a}{\pi} F,$$

und daraus ergibt sich:

$$(66.) \quad \frac{M}{m} = \frac{a\pi}{8c} \cdot \left[1 + \frac{c}{a\pi} (\log + 2)\right].$$

Man sieht also, daß dieser Bruch $\frac{M}{m}$, welchen man wohl die Verstärkungszahl nennt, nicht bloß von der Dicke der trennenden Schicht, sondern auch von der Gröfse der Platten abhängt. — Für A und A' erhält man die Ausdrücke:

$$(67.) \quad A = -\frac{F}{4c\pi}; \quad A' = -\frac{F}{4a\pi^2}.$$

2) Es sey M gegeben. Dann ergibt sich aus (61):

$$(68.) \quad \begin{cases} N = -M \left\{1 - \frac{4c}{a\pi} \left[1 - \frac{c}{a\pi} (\log + 2)\right]\right\} \\ F = -M \frac{4c}{a^2} \left[1 - \frac{c}{a\pi} (\log + 2)\right] \end{cases}$$

und für A und A' erhält man:

$$(69.) \quad \begin{cases} A = \frac{M}{a^2\pi} \left[1 - \frac{c}{a\pi} (\log + 2)\right] \\ A' = \frac{Mc}{a^3\pi^2} \left[1 - \frac{c}{a\pi} (\log + 2)\right]. \end{cases}$$

3) Es sey N gegeben. Dann findet man ganz entsprechend:

$$(70.) \quad \begin{cases} M = -N \left\{1 + \frac{4c}{a\pi} \left[1 - \frac{c}{a\pi} (\log - 2)\right]\right\} \\ F = N \frac{4c}{a^2} \left[1 - \frac{c}{a\pi} (\log - 2)\right] \end{cases}$$

$$(71.) \quad \begin{cases} A = -\frac{N}{a^2\pi} \left[1 - \frac{c}{a\pi} (\log - 2)\right] \\ A' = -\frac{Nc}{a^3\pi^2} \left[1 - \frac{c}{a\pi} (\log - 2)\right]. \end{cases}$$

Schließlich wollen wir noch betrachten, welche Form man den Gleichungen (XII.) und (XIII.) geben muß, um sie von der speciellen Bedingung, daß die Gestalt der Platten kreisförmig sey, zu befreien.

In die Gleichung (XII.) führe man dazu statt des Flächeninhaltes $a^2 \pi$ der einen Platte den Buchstaben s ein, dann lautet sie:

$$(XII.) \quad F - G = -\frac{2\pi c}{s} \left(1 - \frac{c}{a\pi} \log \frac{17,68a}{c}\right) (M - N).$$

Wenn man nun auf der rechten Seite nur das Glied erster Ordnung berücksichtigt, so erhält man:

$$(XIV.) \quad F - G = -\frac{4\pi c}{s} \cdot \frac{M - N}{2},$$

worin man für $\frac{M - N}{2}$ auch M oder $-N$ schreiben kann, da die beiden letzteren Größen der Voraussetzung nach unter sich und von $\frac{M - N}{2}$ nur um ein Glied von der Ordnung $\frac{c}{V_s}$ verschieden seyn können. In dieser Abkürzung ist die Gleichung von der Gestalt der Platten unabhängig, und setzt nicht einmal voraus, daß die Platten *eben* seyen, nur müssen sie *parallel* seyn, so daß die Dicke c der trennenden Schicht constant ist, und müssen ferner so *be-
gränzt* seyn, daß diejenige, deren Flächenraum mit s bezeichnet wird, an keiner Stelle um mehr, als eine Größe von der Ordnung $\frac{c}{V_s}$ über die andere *hervorragt*.

Wenn bei einer Leidener Flasche die Dicke c *nicht überall gleich, aber doch überall gering* ist, so kann man statt (XIV.) allgemein

$$(XIV.) \quad F - G = -\frac{k}{s} \cdot \frac{M - N}{2}$$

schreiben, worin k eine Größe ist, die sich zwar nicht so leicht bestimmen läßt, aber jedenfalls für eine gegebene Flasche konstant, und in Bezug auf den mittleren Werth der Größe c von der ersten Ordnung ist.

Diese beiden Gleichungen (XIV.) und (XIV.), welche als die Grundgleichungen für die Behandlung der Leidener Flasche bezeichnet werden können, sind implicite schon in den Resultaten der Green'schen Untersuchung¹⁾ enthalten, und ich will daher auf ihren Beweis hier nicht näher eingehen.

Was die Gleichung (XIII.) anbetrifft, so läßt sich diese in der Weise, daß sowohl M und N als auch F und G zu Summen vereinigt bleiben, nicht verallgemeinern, sondern man muß hier bei den leicht erweislichen allgemeinen Eigenschaften der Größen M , N , F und G stehen bleiben, daß nämlich durch jede zwei derselben die beiden andern bestimmt sind, daß die Gleichungen, mittelst deren sie von einander abhängen, linear sind, und daß für $F=G=0$ auch $M=N=0$ seyn muß. Daraus ergibt sich:

$$(XV.) \quad M+N=-(\alpha F+\beta G),$$

worin α und β zwei Constante sind, welche für jede Flasche besonders bestimmt werden müssen.

Für den in der Praxis am häufigsten vorkommenden Fall, wo die eine Platte mit der Erde in Verbindung steht, und also F oder $G=0$ gesetzt werden muß, ist die Gleichung (XIV.) nicht bloß angenähert, sondern genau richtig. Auch in (XV.) kommt dann nur Eine unbekannte Constante vor, und da in diesem Falle die angebbare Potentialfunction mit der Summe $M+N$, falls diese nicht Null ist, von entgegengesetzten Vorzeichen seyn muß, so sieht man zugleich, daß die Constanten α und β nicht negativ seyn können.

1) *An Essay on the Application etc. Art. 8.*

II. Ueber die Molecular-Constanten der monoklinödrischen Krystalle;

von Dr. Andr. Jon. Ångström,

Observator an der Sternwarte zu Upsala.

(Mitgetheilt vom Hrn. Verf. aus den *K. Vetensk. Acad. Handl. f. 1850.*)

Immermehr scheint die Erfahrung die Ansicht zur Geltung zu bringen, daß die Phänomene des Schalls, so wie Licht, Wärme und Elektricität nur verschiedene Modificationen der molecularen Kräfte der Materie seyen, und daher ist auch, zur näheren Kenntniß dieser Kräfte, ein vergleichendes Studium ihrer verschiedenen und eigenthümlichen Aeußerungen nothwendig. Ein besonderes Interesse haben diese Untersuchungen, wenn sie Körper mit ungleicher Elasticität nach verschiedenen Richtungen betreffen, weil deren ungleiches Elasticitäts-Verhalten sowohl in den Phänomenen des Schalls, wie in denen des Lichts und der Wärme in eigner Weise auftritt und solchergestalt in deren Fortpflanzungsweise nicht nur specifische Verschiedenheiten sondern auch Berührungspunkte andeutet, deren Auffindung wahrscheinlich der Wissenschaft nicht auf andere Weise möglich seyn würde. Diefs Studium muß besonders bei den klineödrischen Krystallen um so fruchtbarer seyn, als bei ihnen ein *neues Bestimmungselement*, nämlich die verschiedene Richtung der *Haupt-Elasticitätsaxen* hinzukommt.

Wegen der Schwierigkeit, Krystalle des klineödrischen Systems von hinreichender Gröfse und sonstiger dem Zwecke angemessener Beschaffenheit zu erhalten, mußte ich meine Untersuchungen fast ausschließlich auf den Gyps einschränken, von welchem mir, vornehmlich durch die Güte des Hrn. Oberdirectors Wallmark, eine hinreichende Menge zu Gebote stand. Beim Feldspath ver-

mochte ich blofs die Lage der akustischen Axen zu bestimmen, eine Bestimmung, die indess, da die Lage der optischen und thermischen Axen schon bekannt ist, auch in ihrem unvollkommenen Zustande Anlaß zu verschiedenartigen Vergleichen giebt.

I. Optische Constanten des Gypses.

Die von mir benutzte Methode ist, der Hauptsache nach, der von Rudberg bei seiner Untersuchung des Arragonits und Topases angewandten gleich. Ich liefs nämlich drei Prismen so schleifen, dafs ihre Kanten respective parallel waren den drei Elasticitätsaxen. So hat das hier mit No. 1 bezeichnete Prisma den *leichten* Blätterdurchgang zur Base, und seine Kanten sind der symmetrischen Axe parallel. Das Prisma No. 2 hat die Linie, welche den spitzen Winkel der optischen Axen halbirt, zur Kante, und das Prisma No. 3 hat zur Base eine durch dieselbe Linie, winkelrecht gegen den *leichten* Blätterdurchgang gelegte Ebene. Die Prismen No. 2 und 3 sind überdies so geschliffen, dafs der *leichte* Blätterdurchgang oder die symmetrische Ebene den brechenden Winkel derselben mitten durchschneidet, wodurch in beiden die Strahlen, beim Minimum der Ablenkung, der symmetrischen Axe folgen müssen. Ueberdies liegen bei No. 1 die Ebenen, welche den brechenden Winkel bilden, symmetrisch auf beiden Seiten der genannten Mittellinie, welche, nach Neumann, bei $17^{\circ} 5$ C. einen Winkel von 14° mit dem *faserigen* Blätterdurchgange macht.

Gegen die Anwendbarkeit dieser Methode, so weit sie die Prismen No. 2 und 3 betrifft, läfst sich ein wichtiger Einwand erheben. Diejenigen zwei Fresnel'schen Elasticitätsaxen nämlich, welche in der symmetrischen Ebene (dem *leichten* Blätterdurchgange) liegen, haben, nach Nörremberg's Entdeckung, eine ungleiche Lage für verschiedene Farben, und diese ändert sich überdies, nach Neumann's Untersuchungen, mit der Temperatur; es ist also offenbar

unmöglich, daß die Kanten der Prismen No. 2 und 3 diesen Axen parallel seyen. Indefs kann man den Prismen eine solche Gestalt geben, daß der hieraus entspringende Fehler ganz unmerklich wird; dazu ist bloß nöthig, daß diese symmetrische Ebene den brechenden Winkel dieser Prismen mitten durchschneide, und dieß ist auch der Fall bei den in Rede stehenden Prismen. Macht z. B. die Kante des Prismas einen Winkel von 2° mit einer der beiden Elasticitätsaxen, und denkt man sich einen Strahl in der auf der Kante des Prismas winkelrechten Ebene fortgehen, so theilt er sich in zwei, von denen keiner eine vollkommen constante Geschwindigkeit besitzt; allein die Variationen werden bei dem einen im Gyps im größtmöglichen Fall nur auf 0,000012 vom Werthe des Brechungscoefficienten steigen, und sie erreichen ihr Maximum, wenn die Strahlen mit der symmetrischen Ebene einfallen, dagegen wird die Variation Null wenn die Strahlen darauf winkelrecht sind. Giebt man folglich dem Prisma eine solche Gestalt, daß seine Kante parallel ist einer der Elasticitätsaxen in der symmetrischen Ebene, und halbirt diese Ebene zugleich den brechenden Winkel, so können diese beiden Voraussetzungen bis zu einem gewissen Grade fehlerhaft seyn, ohne auf die Genauigkeit des Resultats merklich einzuwirken.

Der Gypskrystall ¹⁾, aus welchem die Prismen geschnitten wurden, war von besonders lockerer Beschaffenheit und in Folge deß höchst schwierig zu bearbeiten. Die spiegelnden Flächen hatten daher nicht in solcher Vollendung erhalten werden können, als zu einer scharfen Beobachtung der Fraunhofer'schen Linien des Sonnenspectrums nöthig war. Vornehmlich ist dieß der Fall mit No 1 worin der *leichte* Blätterdurchgang Sprünge veranlaßt, die besonders bei Anwendung von Sonnenlicht hinderlich sind.

Ue-

1) Ein großer Zwillingskrystall, der den erdigen Blätterdurchgang parallel mit der Hauptaxe des Krystalls zur Zusammensetzungsebene hatte.

Ueberdies stand mir kein recht passendes Local zur Verfügung, so daß ich mich darauf beschränken mußte, die optischen Constanten für das gelbe Licht zu beobachten, welches mit Alkohol und Kochsalz erhalten wird und ein der Linie *D* im Sonnenspectrum nahe kommendes Brechungsvermögen besitzt ¹).

Die Beobachtungsweise war in Kurzem folgende. Das Fadenkreuz im Brennpunkt eines Fernrohrs oder auch, an dessen statt, eine kleine Oeffnung wurde durch die monochromatische Weingeistlampe beleuchtet und die ausfahrenden parallelen Strahlen mit einem Prisma aufgefangen, welches im Centro eines ursprünglich zu magnetischen Beobachtungen benutzten Theodolithen mit excentrischem Fernrohr angebracht war. Um das Prisma in den Winkel der kleinsten Ablenkung einzustellen, war der Apparat versehen mit einer Einrichtung, hauptsächlich bestehend aus einer Scheibe, welche mittelst einer Schraube ohne Ende um eine vertikale mit der Axe des Theodolithen concentrische Axe drehbar war. Mittelst zweier Nonien gab die Ablesung unmittelbar 10".

Nach dieser Andeutung der Beobachtungsweise mögen nun, zur besseren Beurtheilung der Zuverlässigkeit der Resultate, die Mittelwerthe der in verschiedenen Fällen erhaltenen Beobachtungen folgen; jeder ist das Mittel aus drei besonderen Einstellungen. Dabei ist

ϵ = der brechende Winkel:

Δ_0, n_0 = der Ablenkungswinkel und der Brechungscoefficient für den Strahl mit constanter Geschwindigkeit,

Δ, n = der Ablenkungswinkel und der Brechungscoefficient für den Strahl mit variabler Geschwindigkeit.

- 1) In den *Edinburgh Transact. Vol. XVI. p. 378* hat Swan den Brechungscoefficienten des gelben Lichts beim Kalkspath zu 1,658375 bestimmt; nach Rudberg ist n für *D* = 1,65850.

Prisma No. 1.

ε	Δ_0	Δ_r
35° 25' 0" + 18°,8	19° 46' 37" + 18°,5	20° 3' 23" + 18°,5
18 + 17,8	45 53 + 20,0	2 48 + 20,0
47 + 18,2	46 0 + 19,0	3 13 + 19,0
36 + 21,0	45 44 + 18,3	2 14 + 18,3
35° 25' 25" + 18°,9	19° 46' 3" + 18°,9	20° 2' 53" + 18°,9

woraus

$$n_s = 1,52974; \quad n_0 = 1,52267 \quad + 18°,9 \text{ C.}$$

Prisma No. 2.

dessen Kante 12° mit dem faserigen Blätterdurchgang macht.

ε	Δ_0	Δ_r
44° 40' 37" + 19°,5	26° 25' 30" + 20°,6	25° 56' 10" + 20°,6
40 15 + 18,3	25 8 + 18,8	55 41 + 18,8
40 22 + 19,8	24 58 + 19,7	55 30 + 19,7
40 10 + 18,8		
39 48 + 18,3		
44° 40' 12" + 18,9	26° 25' 12" + 19,7	25° 55' 47" + 19°,7

woraus

$$n_s = 1,52976 \quad n_0 = 1,52059$$

oder wenn man den brechenden Winkel des Prismas auf die Temperatur 19°,7, um 1",8 für 1° C., reducirt, und den Werth von n_s zugleich für den Winkel von etwa 2°, den die Kante des Prisma mit der Elasticitätsaxe macht, corrigirt:

$$n_0 = 1,52975; \quad n_s = 1,52057; \quad 19°,7 \text{ C.}$$

Prisma No. 3.

ε	Δ_0	Δ_r
46° 41' 20" + 18°,9	27° 24' 50" + 18°,25	27° 56' 10" + 18°,25
47 + 18,7	47 + 18,3	11 + 18,3
17 + 18,7	59 + 18,5	13 + 18,5
46° 41' 28" + 18°,1	27° 24' 52" + 18°,3	27° 56' 11" + 18°,3

woraus

$$n_0 = 1,52055; \quad n_s = 1,52970; \quad + 18°,2 \text{ C.}$$

Da die Ebene, welche den brechenden Winkel des Prisma halbt, einen Winkel von 40' mit der symmetrischen Ebene macht, so muß n_s eine kleine Berichtigung

erleiden. Die Veränderung in der Geschwindigkeit der Wellenebene ist gewiß unmerklich, aber dieselben Strahlen machen mit der Normale der Wellenebene einen Winkel q , deren Tangente in diesem Falle nach der Theorie ist:

$$\tan q = 0,001388 \sin 1^\circ 10' \cdot \cos 29^\circ = \tan 5''$$

wodurch man den berichtigten Werth erhält:

$$n_e = 1,52975.$$

Stellt man die vorhergehenden Werthe zusammen, so erhält man, wenn π , μ und ν die Werthe der Elasticität für das gelbe Licht in Ordnung ihrer Gröfse bezeichnen:

Prisma.	$\frac{1}{\pi}$	$\frac{1}{\mu}$	$\frac{1}{\nu}$	Temp.
No. 1		1,52267	1,52974	18°,9
No. 2	1,52057		1,52975	19,7
No. 3	1,52055		1,52975	18,2

Aus der Gleichheit der drei Werthe von $\frac{1}{\nu}$, obgleich die einfallenden Strahlen bei No. 1 einen Winkel von 90° mit den bei No. 2 und 3 machen, folgt, dafs, *so lange die Polarisationsebene eines Strahles unverändert bleibt, die Geschwindigkeit desselben die nämliche ist.* Dieses Gesetz, dessen Gültigkeit für Krystalle mit rechtwinklichen Elasticitätsaxen Rudberg zuerst auf experimentellem Wege bewiesen hat, gilt also auch für die monoklinoëdrischen. Wegen der Wichtigkeit, welche dasselbe für die Theorie besitzt, hätte ich gewünscht, es auch für die symmetrische Ebene bestätigen zu können, aber dieß konnte nur unvollständig geschehen. Das Prisma No. 1 hatte zwar auch eine dritte Ebene, fast winkelrecht geschnitten gegen die Mittellinie der optischen Axen, aber theils machte sie bei der Beobachtung blofs einen Winkel von 88° mit der symmetrischen Ebene, theils war auch ihre Oberfläche unvollkommen und etwas gekrümmt, was sich daraus ergab, dafs bei Bestimmung des brechenden Winkels das Fern-

rohr ausgezogen, bei Bestimmung der Ablenkung aber wieder eingeschoben werden mußte. Ich halte es also für überflüssig diese Messungen im Detail anzugeben. Für n_0 gaben beide Winkel

$$n_0 = 1,5223 \quad n_0 = 1,5222$$

beide Werthe also zu klein.

Nimmt man als definitives Resultat des Vorhergehenden folgende Werthe bei $+19^{\circ},0$ C. an:

$$\frac{1}{\pi} = 1,52056; \quad \frac{1}{\mu} = 1,52267; \quad \frac{1}{\nu} = 1,52975,$$

so erhält man den Winkel zwischen den optischen Axen für das gelbe Licht $= 2\alpha$ aus:

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{1,52056}\right)^2 - \left(\frac{1}{1,52267}\right)^2}{\left(\frac{1}{1,52056}\right)^2 - \left(\frac{1}{1,52975}\right)^2}}$$

wornach

$$2\alpha = 57^{\circ} 30' 50'' \text{ bei } +19^{\circ},0 \text{ C.}$$

Nach Neumann's Bestimmung ¹⁾ ist der Winkel zwischen den optischen Axen

$$61^{\circ} 24' \text{ bei } +9^{\circ},38 \text{ C., und } 57^{\circ} 37' \text{ bei } +20^{\circ},25 \text{ C.}$$

wornach

$$2\alpha = 58^{\circ} 3' \text{ bei } +19^{\circ} \text{ C.}$$

Der Unterschied von $32,1$, entsprechend $1^{\circ},5$ in Temperatur, ist leicht erklärlich, theils daraus, dafs die Neumann'schen Messungen sich wahrscheinlich auf rothes Licht beziehen, für welches α gröfser seyn muß, theils auch aus einem wahrscheinlichen Fehler im Werthe von π und μ .

Ein Fehler von $0,00001$ im Werthe von $\frac{1}{\mu}$ verursacht nämlich im Werthe von 2α einen Fehler gleich $8' 48''$.

Um einen wenigstens relativen Werth von den Veränderungen zu geben, welche die Brechungscoefficienten mit Temperaturveränderungen erleiden, bestimmte ich die Ablenkungswinkel für die Prismen 1 und 3 bei zwei um

1) Pogg. Ann. Bd. 35, S. 81.

etwa 10° verschiedenen Temperaturen. Daraus wurde durch Rechnung gefunden, dafs, wenn die Temperatur um 10° C. sinkt, der Unterschied zwischen

dem <i>größten</i> und <i>kleinsten</i> Werth von <i>n</i> <i>zunimmt</i>	0,000113
dem <i>größten</i> und <i>mittleren</i> Werth von <i>n</i> <i>abnimmt</i>	0,000300
dem <i>mittleren</i> und <i>kleinsten</i> Werth von <i>n</i> <i>abnimmt</i>	0,000413.

Wenn also die Temperatur steigt, erleidet der Strahl, dessen Geschwindigkeit am größten ist, $\left(\frac{1}{\pi}\right)$, die kleinste Veränderung, dann kommt der, dessen Geschwindigkeit die kleinste ist, $\left(\frac{1}{\nu}\right)$, und endlich wächst die Geschwindigkeit bei den mittleren Strahlen am meisten. Diefs stimmt vollkommen überein mit der Bewegung der optischen Axen, deren Mittellinie sich immermehr und mit wachsender Schnelligkeit von dem faserigen Blätterdurchgang entfernt, nach Neumann um $2',02$ für 1° C.

Um auch von der Dispersion einen angenäherten Werth zu geben, habe ich folgendes Verfahren angewandt.

In dem Brennpunkt des Fernrohrs wurde eine zweiaxige Krystalllamelle angebracht, so, dafs ihr Hauptschnitt einen Winkel von 45° mit der Einfallsebene machte, und zugleich wurde vor dem Ocular ein Turmalin befestigt, dessen Axe parallel oder winkelrecht zur Einfallsebene war. Die beiden Spectra erschienen nun durchzogen von einer Menge schwarzer Striche, deren gegenseitiger Abstand einen relativen Werth von der Dispersion des Krystalls gab.

Diese Methode hat das Ueble, dafs die Striche ihre Lage mit der Temperatur ändern, aber sie besitzt den Vorzug vor der Anwendung der Fraunhofer'schen Linien, dafs sie immer zugänglich ist, und das Farbenspectrum durch die Interferenzstriche symmetrisch in fast gleich grofse Theile getheilt wird. Man könnte auch, wenn man wollte, der Lamelle eine solche Dicke geben, dafs z. B. zwei

Striche mit zwei Fraunhofer'schen Linien zusammenfielen, wodurch die Resultate beider Methoden vergleichbar mit einander würden.

Bei dem in Rede stehenden Fall wurde der Abstand zwischen fünf der Striche gemessen, von denen der erste die Mitte des rothen Lichts, und der letzte den Anfang des violetten einnahm. Die äußersten gaben

$$\log \Delta \frac{1}{\pi} = 0,001791; \log \Delta \frac{1}{\mu} = 0,001829; \log \Delta \frac{1}{\nu} = 0,001912$$

wo Δ die Differenz bedeutet.

Beim Gyps wächst also die Dispersion mit den Brechungscoëfficienten, weshalb auch α größer seyn muß für das rothe Licht als für das violette. Diefes widerspricht indess der Angabe Neumann's, daß eine der optischen Axen des Gypses den Centralfleck eben so gefärbt hat wie beim Arragonit ¹⁾, während der der anderen undeutlich gefärbt ist. Dieser letztere Umstand entsteht wahrscheinlich durch Zersplitterung (*splittring*) der Elasticitätsaxen, wodurch die optischen Axen auf der einen Seite fast identisch werden für verschiedene Farben.

Eine directe Bestimmung der Größe dieser Zersplitterung ist mir nicht geglückt, aber nach dem eben Angeführten und nach einigen eigenen Beobachtungen glaube ich wenigstens ihre Richtung bestimmen zu können. Denkt man sich nämlich ein Prisma so geschliffen, daß zwei seiner brechenden Winkel symmetrisch zu beiden Seiten der Mittellinie der optischen Axen liegen, so müßte, da die gebrochenen Strahlen in beiden Fällen dieselbe Neigung gegen die Mittellinie haben, die Dispersion beim außerordentlichen Strahl auch dieselbe bleiben. Ist wiederum die Mittellinie selbst verschieden für verschiedene Farben, so würde daraus folgen, daß das eine Spectrum ausge-

1) Die Angaben über den Gyps stimmen im Allgemeinen wenig überein. So ist er nach der Angabe in Herschel's Optik (französische Bearbeitung) und in Baumgartner's Naturlehre *positiv*, nach Radicke's Optik dagegen *negativ*, und auf Grund der letzten Autorität hatte auch ich, obwohl falsch, angenommen, daß er negativ sey.

dehnt und das andere in demselben Maafse zusammengezogen würde. Diefs ist genau der Fall mit dem Prisma No. 1, bei welchem die beiden grössten Brechungswinkel sehr nahe die angegebene Lage besitzen.

Die Mittellinie für das violette Licht liegt also dem faserigen Blätterdurchgang näher als die für das rothe.

Die angeführten Erscheinungen lassen sich genügend erklären, wenn man annimmt, dafs in den monoklinoëdrischen Krystallen die Bewegung des Aethers sich nicht auf ein rechtwinkliches Coordinatsystem, sondern auf Conjugataxen bezieht. In einer früheren Abhandlung habe ich zu beweisen gesucht ¹⁾, dafs die Lichtgeschwindigkeit sich in diesen Fall durch eine der Fresnel'schen vollkommen analoge Formel vorstellen läfst, nur mit dem Unterschied, dafs die Fresnel'schen Elasticitätsaxen nicht fest bleiben, sondern für verschiedene Farben und verschiedene Temperaturen variiren. Die Schwierigkeit ist blofs die: die schiefwinklichen Axen zu bestimmen. Beim Gyps könnte man die beiden Blätterdurchgänge nebst der symmetrischen Axe zu Conjugataxen annehmen, wobei der faserige Durchgang die grösste, und die symmetrische Axe die kleinste Elasticitätsaxe würde. Wenn man dann zu rechtwinklichen Axen, Polarisationsaxen, übergeht, so müfste die gröfsere Axe für das violette Licht dem faserigen Blätterdurchgang näher liegen als für das rothe Licht, weil der Unterschied in der Elasticität gröfser ist. Da der spitze Winkel zwischen den Blätterdurchgängen wächst mit der Temperatur, so folgt auch daraus: 1) dafs die Polarisationsaxen sich von der gröfseren Conjugataxe entfernen, und 2) dafs diejenige Polarisationsaxe, welche der kleinsten Elasticitätsaxe entspricht, stärker wächst. Endlich müfste auch die Mittelgeschwindigkeit, welche einem in der symmetrischen Ebene polarisirten Strahle entspricht, am stärksten wachsen. Alles vollkommen der Erfahrung gemäfs. Diese Uebereinstimmung ist indess nur eine un-

¹⁾ *Mémoire sur la polarisation rectiligne et la double réfraction des cristaux à trois axes obliques (Act. reg. Soc. Upsal. 1849).*

gefährde, so lange sie nicht der Controle einer strengen Berechnung unterworfen wird; dazu habe ich aber nicht alle erforderlichen Data.

II. Klangfiguren des Gypses.

Da es beim Gyps, wegen seiner leichten Spaltbarkeit, unmöglich ist, Scheiben parallel der symmetrischen Axe darzustellen, so habe ich meine Untersuchungen auf solche beschränken müssen, die mittelst Abspaltens erhalten werden. Die Beobachtungen gelten also bloß für die Elasticitätsvertheilung in der Symmetrie-Ebene selbst, aber diese zu kennen hat auch in theoretischer Hinsicht das meiste Interesse.

Die Methode, welche zur Bestimmung der Gestalt der Curven angewandt wurde, ist kürzlich folgende. Nachdem ich die akustische Figur auf der Oberfläche einer kreisrunden Lamelle dargestellt hatte, zeichnete ich sie mit einer feinen Nadel so genau wie möglich ab, was sich beim Gyps wegen seiner geringen Härte leicht bewerkstelligen läßt. Dann zog ich concentrische Kreise auf derselben Fläche und maß den Abstand zwischen den Durchschnitten dieser Kreise mit der gezeichneten Klangfigur. Auf diese Weise erhielt ich einen doppelten Werth für die Coordinaten eines Punkts der Curve, und endlich durch Berechnung die Constanten der Curven selbst. Jede Beobachtung ist im Allgemeinen das Mittel aus drei bis fünf, auf 0,05 Millimeter sicheren Messungen.

Die Klangfiguren des Gypses zerfallen natürlich in zwei Hauptklassen, je nach dem der Rand oder die Mitte der Scheibe angestrichen wird. Zu jeder dieser Hauptklassen gehören wiederum Klangfiguren von besonderen Ordnungen, abhängig von den Punkten der Scheibe, die beim Versuch befestigt werden.

a) *Erste Klasse.* Die einzige Art hierher gehöriger Klangfiguren besteht aus zwei Hyperbelsystemen. Sie sind zuerst von Savart¹⁾ angegeben, welcher sich, in seiner

1) *Ann. de chim. et de phys. Ser. II. T. XL. p. 1 et 113.*

interessanten Abhandlung über die Klangfiguren bei krystallisirten Körpern auch, obwohl nur im Vorbeigehen, mit denen des Gypses beschäftigt; seine Bestimmung über die Lage der beiden Hyperbeln ist indess unrichtig. Er nimmt nämlich an, die beiden Blätterdurchgänge, der *erdige* und der *faserige*, seyen die Asymptoten zu einem der Hyperbelsysteme, und der *faserige* Blätterdurchgang überdies die Hauptaxe des anderen. Dafs dies nicht der Fall ist, zeigt schon Fig. 1 Taf. II., welche die Lage der beiden Curven in Bezug auf die Linien ff' und nn' wiedergiebt, von denen die erstere den Durchschnitt des *erdigen*, und die zweite den Durchschnitt des *faserigen* Blätterdurchgangs mit der Ebene der Scheibe oder den *leichten* Blätterdurchgang vorstellt.

Sey die Gleichung der Hyperbel:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ferner α der Winkel, den die reelle Axe a der Hyperbel mit dem *faserigen* Blätterdurchgang macht; A der Winkel zwischen den beiden Axen der Hyperbeln; D und Δ Durchmesser und Dicke der Scheibe, so erhält man für

Scheibe No. 1, bei der $D=49^{\text{mm}}$ und $\Delta=1^{\text{mm}},38$

	a .	b .	$\frac{b}{a}$	α .	A .
Hyp. (I.)	8,67	12,244	1,412	$14^{\circ} 25'$	} $46^{\circ} 4'$
„ (II.)	9,06	13,91	1,535	$60^{\circ} 29'$	

Die Lage der Hyperbel (I.) machte es ganz wahrscheinlich, dafs die beiden Blätterdurchgänge die Conjugataxen dieser Curve seyen. Substituirt man, zur Prüfung dessen, $a=8,67$, $b=12,244$, $\beta=66^{\circ} 14$ in der Formel

$$\tan \alpha = - \frac{(a^2 + b^2) \tan \beta}{2a^2} \pm \frac{1}{2a^2} \sqrt{(a^2 + b^2) \tan^2 \beta + a^2 b^2}$$

so erhält man

$$\alpha = 15^{\circ} 45'.$$

Der Unterschied $1^{\circ} \frac{1}{4}$ ist indess gröfser als dafs er dem möglichen Beobachtungsfehler zugeschrieben werden könnte

und daher kann diese Voraussetzung auch nicht als bestätigt angesehen werden.

Eine andere Scheibe, bei der $D=47^{\text{mm}},5$ und $\Delta=1^{\text{mm}},12$ gab auch für das System (I)

$a.$	$b.$	$\frac{b}{a}$	$\alpha.$
8,55	12,18	1,424	$14^{\circ} 34'$

folglich ein Gleiches wie die vorige.

Bei den eben angeführten Versuchen war die Gyps-scheibe wie gewöhnlich in der Mitte befestigt; da indess bei dieser Befestigungsweise auch leicht Klangfiguren anderer Ordnung entstehen, und bei dünnern Scheiben diese allein, so wurde die Scheibe bei den beiden folgenden Beobachtungen an einem der Durchschnittspunkte zwischen der reellen Axe und der in Rede stehenden Hyperbel befestigt; dadurch ward die Lage der Knotenlinie etwas verändert, aber der Ton reiner, so dafs man auch die Anzahl der Schwingungen, die mit N bezeichnet seyn mag, mit Erfolg bestimmen konnte. Zu dieser Bestimmung diente Marloye's *Sonomètre différentiel*, verglichen mit Marloy's Stimmgabel, welche, bei $+15^{\circ}$ C., 512 Schwingungen in der Sekunde macht. Hr. Oberdirector Wallmark, zu dessen schöner Instrumentensammlung das eben erwähnte Instrument gehört, hatte auch die Güte bei diesen akustischen Vergleichen behülflich zu seyn.

No.	$D.$	$\Delta.$	$a.$	$b.$	$\frac{b}{a}$	$N.$	$\alpha.$	$A.$
2	54,52	2,28	9,527	13,855	1,455	7805	$12^{\circ} 20'$	$47^{\circ} 26'$
3	"	0,97	9,651	14,290	1,481	3351	12 27	46 38
4	54,80	2,055	9,550	14,162	1,483	6919	12 23	46 58
5	51,45	1,50	8,72	12,183	1,397		12 30	
6	"	1,14	9,04	13,373	1,479	4343	13 39	45 41

2	54,52	2,28	10,235	16,520	1,613	6773	$59^{\circ} 46'$	
3	54,52	0,97	9,940	15,402	1,550	2876	59 5	
4	54,80	2,055	10,08	16,260	1,613	6081	50 21	
5	51,45	1,50	9,572	15,242	1,592			
6	51,45	1,14	9,302	14,388	1,547	3787	59 20	

Berechnet man unter der Voraussetzung, daß die Oscillationsmengen sich direct wie die Dicke, und umgekehrt wie die quadrirten Durchmesser der Scheiben verhalten, den Werth von N aus den für No. 2 gegebenen Werthen, so erhält man:

No. 3	Hyp. I	$N = 3322$	$\delta = + 29$
	" II	$N = 2882$	$\delta = - 6$
No. 4	Hyp. I	$N = 6960$	$\delta = - 41$
	" II	$N = 6050$	$\delta = + 31$
No. 6	Hyp. I	$N = 4383$	$\delta = - 40$
	" II	$N = 3803$	$\delta = - 16.$

Da der Werth von Δ bis auf $0^{mm},01$ nicht ganz sicher ist und die gemachten Voraussetzungen möglicherweise auch nur angenähert richtig sind, weil die gegen die Oberfläche der Scheiben winkelrechte Elasticitätsveränderung nicht in Rechnung gezogen wurde, so ist der Unterschied δ zwischen den beobachteten und berechneten Werthen von N so klein, als man es unter diesen Umständen nur wünschen kann.

Die Lage der Hyperbeln ist, nach den angeführten Beobachtungen zu schliessen, nahezu constant ') allein nicht so das Verhalten ihrer Axen, die einander immer näher kommen, je dünner die Scheiben werden. Uebrigens steht die Lage der Knotenlinien in keinem bekannten Verhältniß zu den Krystallisationsebenen des Gypses. So müßte, damit die beiden Blätterdurchgänge, die nach Neumann einen Winkel von $66^{\circ} 13'$ mit einander machen, die Conjugataxen zur Hyperbel I und die Asymptoten zur Hyperbel II wären, α im ersteren Falle 15° bis 16° seyn und im letzteren Falle $56^{\circ} 53'$ oder gleich der Hälfte des stumpfen Winkels, den die beiden Blätterdurchgänge mit einander bilden. Die Krystallebene l (Fig. 1 Taf. II.) welche $61^{\circ},5$ mit dem faserigen Blätterdurchgang macht, unter-

- 1) Um zu sehen, ob die Knotenlinien ihre Lage mit der Temperatur änderten, wurde eine Gypsscheibe bis zum Weißwerden erhitzt und dann erkalten gelassen. Dabei hielt die Knotenlinie (II) sich unverändert, aber das System (I) hatte sich gedreht, so, daß seine imaginäre Axe sich von ff entfernte.

scheidet sich indess nur um 1 bis 2° von der Hauptaxe der Hyperbel (I), fällt aber, wie es scheint, nicht mit ihr zusammen.

Befestigt man die Scheibe im Mittelpunkt und streicht sie dann an passenden Punkten, so entstehen, wenn sie etwas dünn ist, — die Scheiben No. 3 und 4 sind schon zu dick — leicht Klangfiguren höherer Ordnungen. Diese sind Curven dritten Grades und bestehen jede, entsprechend den beiden Hyperbelsystemen (I) und (II), aus zwei hyperbelartigen Zweigen mit einer Hyperbola anguinea im Centro. Die allgemeine Gleichung derselben ist folgende:

$$y^2 x + ax^2 y + cy = dx^3 + ex$$

Ich habe versucht die Constanten dieser Formel bei der Scheibe No. 3 zu bestimmen, und, in Millimeter ausgedrückt, für das eine, der Hyperbel (I) entsprechende, System erhalten:

$$y^2 x - 1,27 x^2 y + 56,89 y = 2,2 x^3 - 206,9 x \dots (1.)$$

$$\beta = 59^\circ \frac{3}{4}; N = 7356$$

und für das andere, der Hyperbel II entsprechende:

$$y^2 x - 1,52 x^2 y + 81,28 y = 1,9 x^3 - 155,30 x$$

$$\beta = 39^\circ; N = 6891,$$

wo β den Winkel bezeichnet, den die y -Axe, welche zugleich die Asymptote zur Hyperbola anguinea ist, mit dem faserigen Blätterdurchgang bildet, und N wie zuvor die Schwingungszahl bezeichnet. (Siehe Fig. 2 Taf. II.)

Ein bemerkenswerther und auch sogleich in die Augen fallender Umstand ist der (s. Fig. 3 Taf. II.), daß die beiden Systeme zu den vorhergehenden der ersten Ordnung eine veränderte Lage haben. Die Mittellinie des Winkels, den die y -Axen ($= bax$) der beiden Hyperbeln mit einander bilden, macht nach vorhergehender Tafel $53^\circ 58'$ oder bei der Scheibe No. 3 $54^\circ 18'$ mit dem faserigen Blätterdurchgang; die Mittellinie der Curven (1) und (2) macht dagegen $49^\circ \frac{3}{8}$ mit derselben Fläche; das letztere System hat sich also um ganze 5° gedreht, obgleich im entgegengesetzten Sinn mit dem, in welchem die optischen Axen

sich beim Erhitzen bewegen. In wiefern dieser Umstand analog sey dem Zersplittern der optischen Elasticitätsaxen beim Gyps, kann nur eine analytische Behandlung dieser Erscheinung entscheiden. Sicher ist indess, daß die Axen der verschiedenen Arten von Klangfiguren nicht zusammenfallen, was wir bei den Klangfiguren der anderen Klassen noch ferner bestätigt finden werden.

Die Anzahl der Schwingungen, welche den Knotenlinien (1) und (2) entsprechen, scheint auch zu der Schwingungsanzahl der entsprechenden Hyperbeln in einfachem Verhältniß zu stehen, man erhält nämlich

$$\frac{N_{(1)}}{N_1} = 2,1954 = \frac{11}{5} \text{ sehr nahe}$$

und

$$\frac{N_{(2)}}{N_{II}} = 2,3957 = \frac{12}{5} \text{ etwa.}$$

Bei dünnen Scheiben haben die beiden Knotenlinien der anderen Ordnung eine merkwürdige Beweglichkeit, abhängig von der Lage des festen Punktes. Fig. 6 Taf. II. stellt die drei, den beiden Systemen (1) und (2) entsprechenden Formen vor¹⁾. Alle diese Curven scheinen indess dargestellt zu werden durch die Gleichung

$$y^2 x + ax^2 y + by^2 + cy = dx^3 + ex + f$$

wobei b und e auch gleich Null werden können.

Die eben angeführten Knotenlinien repräsentiren also eine ganze Klasse von Curven dritten Grades, und dieß ist um so merkwürdiger, als, meines Wissens, diese Curven sonst noch nicht im Bereich der Physik vorgekommen sind.

b) *Zweite Klasse.* Führt man den Strich durch ein Loch in der Mitte der Scheibe und befestigt dieselbe an einem Punkt der entstehenden Knotenlinie, — am Ende der größeren Axe — so erhält man eine geschlossene Curve

1) Zwei andere, den elliptischen Knotenlinien entsprechende Formen sind in Fig. 7 Taf. II. abgebildet; wobei die punktirte Linie erhalten wird, wenn der Punkt c' fest ist, und die andere, wenn c befestigt wird. Eine Knotenlinie der dritten Ordnung stellt Fig. 9 Taf. II. dar.

von elliptischer Form und wahrscheinlich die, welche durch die Endpunkte der Perpendikel erzeugt wird, wenn gegen die Tangenten einer Ellipse winkelrechte Linien gefällt werden. Errichtet man nämlich auf den gegebenen Axen eine Ellipse und vergleicht dieselbe mit der auf der Scheibe gezeichneten Knotenlinie, so zeigt sich die Abweichung zwischen beiden Curven in den Octanten, so, daß die Knotenlinie außerhalb der Ellipse liegt.

Dieselbe Curve erhält man auch bekanntlich durch einen Hauptschnitt von Fresnel's Elasticitätsfläche. Man bekommt also, wenn ϑ den Winkel zwischen dem Radius vector und der großen Axe bezeichnet, die Polargleichung der Curve

$$r^2 = a^2 \cos^2 \vartheta + b^2 \sin^2 \vartheta$$

oder die für rechtwinkliche Coordinaten:

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 x^2 + b^2 y^2 \dots (a).$$

Folgende Werthe von a und b , ausgedrückt in Theilen der zur Einheit angenommenen Radien der Scheibe, sind gemessen worden:

No.	a .	b .	$\frac{a}{b}$	N.	β .
1	0,8096	0,5850	1,383		53° 25'
3	0,8973	0,5852	1,380	5651	54 0
4	0,8091	0,5860	1,381		53 33
6	0,8092	0,5867	1,379	7420	53 40
Mittel	0,8088	0,5857	1,381		53° 40'

wobei β den Winkel ausdrückt, den die kleinere Axe der Curve mit dem faserigen Blätterdurchgange macht.

Die größte Elasticitätsaxe des Gypses in akustischer Hinsicht macht also mit dem faserigen Blätterdurchgang einen Winkel von 53° 40' oder fällt in den spitzen Winkel, den beide Durchgänge mit einander bilden; sie fallen auch nahe zusammen mit der Linie, welche den Winkel zwischen den y -Axen der beiden Hyperbeln halbirte, und nach dem Vorhergehenden 53° 58' mit demselben Blätterdurchgang macht. Im Vorbeigehen mag indeß bemerkt seyn, daß die eben genannte Linie nur in so

weit die Lage der größten Elasticitätsaxe bezeichnet als die beiden Hyperbelsysteme vollkommen gleich sind, und dafs die Elasticitätsaxe näher an die y -Axe (b) des Systems fällt, dessen Verhältnifs zwischen b und a das gröfsere ist, folglich hier Hyperbel (II), weshalb auch, was wirklich der Fall ist, die Elasticitätsaxe einen kleineren Winkel als $53^{\circ} 58'$ mit dem faserigen Blätterdurchgang machen mufs.

Das Verhältnifs zwischen a und b ist nach den vorhergehenden Beobachtungen unabhängig von den Dimensionen der Scheibe und giebt folglich einen relativen Werth von der Elasticität in der symmetrischen Ebene. *Im Allgemeinen müfste also diese Methode mit Vortheil angewandt werden können, um das Elasticitäts-Verhalten eines Kristalls in akustischer Beziehung zu bestimmen, sobald die Kleinheit desselben die Anwendung dieser Methode nicht unmöglich macht.* Sie ist meines Wissens bisher nicht angewandt worden. Die Savart'schen Beobachtungen umfassen nämlich blofs die beiden Hyperbelsysteme (I) und (II) und keineswegs die elliptischen oder die Knotenlinien höherer Ordnungen.

Die Knotenlinien der nächst höheren Ordnung zu beobachten ist mir nicht geglückt. Sie besteht aus einer *Ellipse* oder *elliptischen Curve* *nebst einer Hyperbel*. Die Scheibe wurde an einem der vier Durchschnittspunkte zwischen der Ellipse und der Hyperbel befestigt.

Bei der, auf eine Dicke von $0^{\text{mm}},4$ reducirten Scheibe No. 1 wurden diese beiden Curven gemessen; sie gaben in Werthen des Radius:

	a .	b .	$\frac{a}{b}$	β .
Ellipse	0,8595	0,7002	1,228	$48^{\circ} 20'$
Hyperbel	0,2687	0,9442		$48^{\circ} 20'$

wobei β den Winkel bedeutet, welchen die b -Axe der Curven mit dem faserigen Blätterdurchgang bildet.

Die verschiedenen Werthe, welche wir bei den beiden eben angeführten Systemen von Knotenlinien für β erhalten haben, deuten an, dafs sich die Hauptaxen des letzten

Systems etwas über 5° um die des ersteren gedreht haben. Es zeigt sich hier also dasselbe auffallende Verhältniß wie bei den Knotenlinien der ersten Klasse, und dieß giebt der von mir schon früher geäußerten Vermuthung einen hohen Grad von Wahrscheinlichkeit, daß nämlich diese Erscheinungen von analoger Natur seyen mit der verschiedenen Lage der optischen Elasticitätsaxen für die verschiedenen Farben in schiefaxigen Krystallen. Es liefert überdieß eine fernere Bestätigung des von mir in einer früheren Abhandlung aufgestellten Satzes: daß *die klinoëdrischen Krystalle in akustischer Hinsicht keine rechtwinklichen Elasticitätsaxen besitzen*, weil das Daseyn eines solchen Axensystems den verschiedenen Arten der Klangfiguren nothwendig eine übereinstimmende Lage geben müßte.

Uebrigens zeigt sich auch hier, bei den dünnen Scheiben, dieselbe, von der Lage des Stützpunktes abhängige Beweglichkeit in der Gestalt der Knotenlinien, welche wir schon bei den hyperbolischen Knotenlinien bemerkten. Fig. 8 Taf. II. zeigt eine dieser Gestalten. Auch die elliptische Knotenlinie, deren Gleichung (α) ist, wird eiförmig, wenn der fixe Punkt auf der großen Axe innerhalb der Curve verschoben wird, und sie wird dann vorgestellt durch die Gleichung:

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 x^2 + b^2 y^2 + cx^3 + dxy^2.$$

Nimmt man wiederum an, daß die normale Gestalt der Knotenlinie eine Ellipse sey, folglich

$$r + r' = c$$

so erhält man für die Eiform, nach Steiner, ganz einfach

$$r + ar' = c'$$

wo r und r' die Radii vectores der Curve bezeichnen.

Auch eine aus zwei Ellipsen bestehende Knotenlinie ist von mir beobachtet worden; sie konnte indeß nicht vollständig ausgebildet erhalten werden und es mag daher nur angeführt werden, daß deren Axen einen Winkel von etwa 6° mit den Axen der Knotenlinie (a) zu machen scheinen, obwohl in entgegengesetztem Sinn gegen (b).

Ein

Ein Vergleich zwischen Theorie und Erfahrung kann in Bezug auf die vorhergehenden Klangfiguren um so weniger stattfinden, als die Theorie bisher nur für den Fall von kreisrunden Scheiben mit gleicher Elasticität nach allen Richtungen behandelt worden ist¹⁾; es kann indeß von Interesse seyn, zu sehen, in wiefern auch hier etwas Entsprechendes stattfindet. Nach Kirchhoff²⁾ hat man folgende relative Werthe der Schwingungs-Anzahl für die verschiedenen Knotenlinien, wobei m die Anzahl der Durchmesser und μ die Anzahl der Kreise bezeichnet.

μ	$m=0$	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$
0			1,0000	2,3124	4,4085
1	1,6131	3,7032	6,4033		

und für die Radien der Winkel

μ	$m=0$	$m=1$	$m=2$	$m=3$
1	0,68062	0,78136	0,82194	0,84523.

Den Werthen $\mu=0$ und $m=2$ entsprechen beim Gyps die beiden Hyperbeln (I) und (II); für $\mu=0$ und $m=3$ hat man die Systeme (1) und (2) und deren relative Werthe der Schwingungszeit sind nach dem Vorhergehenden

2,1954 2,3957

und das Mittel aus beiden 2,2956, welches von dem von Kirchhoff berechneten nur unbedeutend abweicht.

Den Werthen $\mu=1$ und $m=0$ entspricht die elliptische Knotenlinie (a) und die entsprechende Schwingungszeit, bezogen auf die Hyperbeln (I) und (II) ist:

für No. 3 . . .	1,687	1,965
„ No. 6 . . .	1,708	1,690
	1,698.	1,963.

Beide Werthe sind hier größer als bei den Scheiben mit gleicher Elasticität in allen Richtungen.

1) Cauchy (*Exerc. de math. Année IV. p. 1*) hat zwar das allgemeine Problem behandelt, allein die Differential-Gleichungen, zu welchen er gelangte, nicht integrirt.

2) Pogg. Ann. Bd. 81, S. 258. Crelle Journ. f. Math. Bd. 40, S. 85. Poggendorff's Annal. Bd. LXXXVI.

Endlich hat man auch für die Knotenlinien (a) und (b)

$$\sqrt{ab} = 0,6881; = 0,7758,$$

welche Werthe von den von Kirchhoff für $\mu=1$, $m=0$ und $m=1$ berechneten nicht bedeutend abweichen.

Man sieht also, dafs wirklich eine Entsprechung stattfindet, wenn auch beim Gyps die Klangfiguren auferordentlich complicirter sind; aber gerade dieser letzte Umstand, mufs deren theoretische Behandlung einen um so gröfsern Werth für eine nähere Kenntnifs der Anordnung und Wirkungsweise der Materie verleihen.

III. Leitungsvermögen des Gypses für Wärme.

Nach Senarmont's interessanten Untersuchungen ¹⁾ hat das isotherme Ellipsoid des Gypses seine grösste Axe in der symmetrischen Ebene, woselbst sie mit dem faserigen Blätterdurchgang einen Winkel von $49^{\circ},8$ macht, und innerhalb des spitzen Winkels fällt, welche beide Blätterdurchgänge mit einander bilden; seine kleinste Axe ist dagegen parallel mit der symmetrischen Axe des Krystalls. Die drei Axen, welche wir, in Ordnung ihrer Gröfse, a , b und c nennen wollen, verhalten sich zu einander wie

$$1,51 : 1,23 : 1; \text{ und } \frac{a}{b} = 1,23.$$

Das letzte Verhältnifs, sowie die Lage von a , habe ich durch folgende Beobachtungen geprüft; dieselben wurden nach Senarmont's Methode angestellt und gaben auch für die der Schmelztemperatur des Waxes entsprechende Isotherme dasselbe Resultat, allein sie suchten zugleich die Frage zu beantworten, ob die thermischen Axen eine feste Lage haben oder sich mit der Temperatur verschieben, wie es bei den optischen Axen der Fall ist. Die Versuche wurden mit Scheiben von verschiedener Dicke und Gröfse angestellt, doch von solcher Gröfse, dafs die Unregelmäfsigkeiten in der Gestalt der Scheiben keinen Einfluss auf den Versuch haben konnten.

1) *Ann. de chim. et de phys. T. XXII. p. 210. (Ann. Bd. 75, S. 50.)*

No.	b.	a.	$\frac{a}{b}$	α .
1	^{mm} 5,22	6,35	1,22	50°,5
2	12,81	15,718	1,23	48°,0
3	11,25	13,78	1,22	48°,7
4	12,428	15,015	1,21	52°,0
5	11,25	13,52	1,20	47°,5
6	10,58	13,11	1,24	48°,0
			1,220	49°,1

Erhitzt man die Scheibe etwas stärker, so wird sie auf der Oberfläche weifs. Der weisse Theil behält dabei seine elliptische Form, stellt also eine Isotherme entsprechend der Temperatur dar, bei welcher der Gyps sein Krystallwasser verliert. Ich habe gesucht die Lage der Curve zu bestimmen und dadurch folgende Werthe von α erhalten, von denen die beiden ersten den Versuchen 1 und 2 in vorhergehender Tabelle entsprechen.

No. 1	54°,0
No. 2	54°,2
Mittel aus 5 anderen Versuchen (53° bis 59°)	56°,5

Indefs können diese Bestimmungen, wegen der Kleinheit der Fläche und keineswegs scharfen Begränzung der Figur, so wie der daraus folgenden Unsicherheit der Messung, nicht als entscheidend in der Frage betrachtet werden, ob die Isothermen wirklich ihre Lage ändern; allein der folgende Versuch giebt dafür einen hohen Grad von Wahrscheinlichkeit.

Die Scheibe No. 4 (akust. Versuch) wurde nämlich bei -16° C. mit einer dünnen Eisrinde überzogen und dann vom Mittelpunkt aus erwärmt. Der geschmolzene Theil bildete dann eine Isotherme für 0° , deren gröfsere Axe einen Winkel von 46° mit dem faserigen Blätterdurchgang bildete. Ein Versuch mit Wachs gab denselben Winkel $= 50^{\circ}$.

Man hat folglich:

Lage der großen Axe bei 0°	α. 46°
„ „ „ „ „ 68°	49
„ bei Zersetzung des Gypses	55.

Obgleich die Versuche nicht alle wünschenswerthe Genauigkeit besitzen, so glaube ich dennoch schliessen zu dürfen, dass die Isothermen in der symmetrischen Ebene des Gypses wirklich ihre Lage mit der Temperatur verändern, und dass diese Veränderung in demselben Sinne und zugleich zu ungefähr gleichem Betrage wie das Drehen der optischen Elasticitätsaxen bei einer gleichen Temperaturveränderung geschieht.

IV. Ausdehnung des Gypses durch die Wärme.

Nach Neumann's Berechnung der Mitscherlich'schen Beobachtungen hat man für die relative Ausdehnung des Gypses zwischen 0° und 100° folgenden Ausdruck ¹⁾:

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta C}{C} - 3,1807 \sin l' \cdot \cos^2 X + 8,4564 \sin l' \cdot \cos^2 Y + 9,4174 \sin l' \cdot \cos X \cos Z \quad (\alpha)$$

worin $\frac{\Delta C}{C}$ die Ausdehnung parallel der Länge des Prismas oder dem *erdigen* Blätterdurchgang bedeutet, und X, Y, Z die Winkel des Radiusvectors mit den drei rechtwinklichen Axen bezeichnen, von denen die erste winkelrecht auf dem *erdigen* Blätterdurchgang steht, die zweite parallel der symmetrischen Axe ist, und die dritte $\frac{\Delta C}{C}$ entspricht.

Derselben Rechnung zufolge erhält man auch die Ausdehnung längs den thermischen Axen aus:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Delta c}{c} &= \frac{\Delta C}{C} - 0,001909 \\ \frac{\Delta b}{b} &= \frac{\Delta C}{C} - 0,000983 \\ \frac{\Delta a}{a} &= \frac{\Delta C}{C} - 0,002468 \end{aligned} \right\} \dots (\beta).$$

wobei die kleinste Axe, entsprechend $\frac{\Delta c}{c}$, fast 12° mit dem

1) Pogg. Ann. Bd. XXVII. S. 240.

faserigen Blätterdurchgang bildet und folglich, bis auf ein Paar Grade, mit der Mittellinie der optischen Axe zusammenfällt. Die größte Axe, entsprechend $\frac{\Delta a}{a}$, ist parallel mit der symmetrischen Axe.

Inzwischen ist, meines Wissens, die absolute Ausdehnung des Gypses noch nicht bestimmt worden; folgende Beobachtungen dürften diese Lücke einigermaßen ausfüllen. Zwei Gypslamellen, jede von etwa 66^{mm},8 Länge, wurden etwa 30° über die Temperatur des Zimmers erwärmt, und mittelst eines besonderen Instruments, das nach demselben Princip wie Jerichau's Thermomikrometer construiert war ¹⁾, die Verkürzung gemessen, welche die Lamellen erlitten, wenn die Temperatur um etwa 18° C., bis auf die Temperatur des Zimmers herabsank. Aus den bekannten Winkeln X und Z konnte man dann $\frac{\Delta C}{C}$ nach (α) berechnen.

Solchergestalt erhielt man, wenn Δt° den der Bestimmung von $\frac{\Delta R}{R}$ zum Grunde liegenden Temperatur-Unterschied bezeichnet, für die 100° C. entsprechende Ausdehnung folgende Werthe:

	X	Δt°	$\frac{\Delta R}{R}$	$\frac{\Delta C}{C}$
No. 1	29° 43'	17°,0	0,002322	0,001411
do. 2	31 43	17 ,5	0,002324	0,001348
do.	do.	17 ,0	0,002327	0,001351
do.	do.	24 ,5	0,002436	0,001401
				0,001401.

Substituirt man den erhaltenen Werth von $\frac{\Delta C}{C} = 0,001401$ in der Formel (β) so erhält man:

$$\frac{\Delta c}{c} = -0,000508 \quad \frac{\Delta a}{a} = 0,003869$$

$$\frac{\Delta b}{b} = 0,002384 \quad \frac{\Delta V}{V} = 0,005745.$$

Der Gyps hat folglich, wie der Kalkspath, die Eigen-

1) Pogg. Ann. Bd. LIV, S. 139.

schaft, sich in einer gewissen Richtung zusammenzuziehen¹⁾; indefs kann man diese Erscheinung nicht als eine Ausnahme von der allgemeinen Regel, daß die Körper durch Wärme ausgedehnt werden, betrachten, denn sie beruht darauf, daß das Gleichgewicht der Molecule sich auf ein schiefwinkliches Axensystem bezieht, auf Conjugataxen, deren Neigung zugleich von der Temperatur abhängig ist.

V. Härte des Gypses.

Nach Frankenheim ist im Allgemeinen die Härte eines Krystalls am geringsten winkelrecht gegen seine Blätterdurchgänge. Wendet man diese Regel auf den Gyps an, so sollte die kleinste Härte längs der symmetrischen Axe oder winkelrecht gegen den leichten Blätterdurchgang, die mittlere winkelrecht gegen den faserigen, und die größte winkelrecht gegen den erdigen Blätterdurchgang stattfinden. Was die Härte im erstern Falle betrifft, so hat es damit seine Richtigkeit; aber es gilt nicht mehr für die Vertheilung der Härte in der symmetrischen Ebene. *In dieser Ebene fällt nämlich die größte und kleinste Härte, nach meinen Versuchen, sehr nahe zusammen mit den Axen der optischen Elasticität* oder, wie ich sie lieber nennen will, *den Polarisationsaxen*, so daß die größte Härte sich parallel der Linie findet, welche den spitzen Winkel der optischen Axen halbirt. Diefs Resultat halte ich für zuverlässig; es stimmt auch in so weit mit Frankenheim's Untersuchung, als derselbe zeigt, daß wenn die Oberfläche eines Krystalls von zwei, einen spitzen Winkel mit einander bildenden Blätterdurchgängen durchschnitten wird, *die größte Härte innerhalb des spitzen Winkels zwischen bei-*

- 1) Eine einfache Art, sich von der ungleichen Ausdehnung des Gypses nach verschiedenen Richtungen zu überzeugen, ist folgende. Erhitzt man eine Gypsscheibe bis zu dem Punkt, wo sie ihr Krystallwasser entläßt, so zerfällt sie, in Folge von Spannungen, gewöhnlich nach den beiden Blätterdurchgängen, und dann kann man beobachten, wie der faserige Blätterdurchgang seine Richtung sehr nahe unverändert behalten, der erdige aber um mehr Grade verändert hat.

den Blätterdurchgängen und näher dem leichtesten Blätterdurchgang liegt.

Inzwischen ist Franz ¹⁾ neulich zu einem andern Resultat gelangt. Er hat nämlich gefunden, daß die kleinste Härte beim Gyps mit einer Richtung zusammenfällt, die 14° mit dem *erdigen* Blätterdurchgang bildet und innerhalb des spitzen Winkels beider Blätterdurchgänge liegt. Diefes Resultat widerspricht indess dem von ihm selbst aufgestellten Gesetz: *»Die härteste Richtung im Krystall ist diejenige, welche den Spaltungsebenen parallel ist,«* woraus mit Nothwendigkeit folgt, daß die größte und nicht die kleinste Härte innerhalb des spitzen Winkels der Blätterdurchgänge liegen muß. Die mit vieler Sorgfalt angestellten Beobachtungen geben die Härte indess nicht direct, sondern hergeleitet aus der Voraussetzung, daß die Gewichte, welche erforderlich sind, um eine Stahlspitze in verschiedenen Richtungen auf einer Gypslamelle zu bewegen, proportional seyn der Härte in denselben Richtungen. Diese Voraussetzung scheint indess nicht ganz richtig zu seyn; zwar ist die Kraft, welche zur Bewegung der Stahlspitze erfordert wird, unter sonst gleichen Umständen, in demselben Maasse größer als die Spitze tiefer in die Lamelle eindringt; wenn aber in Folge einer Verminderung der Härte die Spitze tiefer einsinkt in die Lamelle, so muß auch, aus derselben Ursache, der Widerstand der von der Stahlspitze bei ihrer Bewegung verdrängten Theilchen geringer seyn. Die Gewichte können folglich nicht in einem einfachen Verhältniß zur Härte stehen; wahrscheinlich sind dieselben $= f\left(\frac{\text{Elasticität}}{\text{Dichtigkeit}}\right)$.

VI. Verhalten des Gypses zur Electricität und zum Magnetismus.

Nach Wiedemann ²⁾ ist das Leitungsvermögen des Gypses in der symmetrischen Ebene am *größten* in einer

1) Pogg. Ann. Bd. 80, S. 37.

2) Pogg. Ann. Bd. 76, S. 404.

Richtung, welche 25° mit dem *faserigen* Blätterdurchgang macht, weshalb das *kleinste* $1^{\circ},13$ mit dem erdigen Blätterdurchgang oder der Hauptaxe des Krystalls bildet. Diefes Resultat, welches ich bewährt gefunden, ist auch, obwohl auf einem ganz andern Wege, durch Senarmont's Untersuchung bestätigt worden ¹⁾. Der Letztere hat auch das Verhältniß zwischen dem größten und dem kleinsten Leitvermögen auf der in Rede stehenden Durchgangsfläche $= 1,34$ angegeben. Diese Untersuchungen gelten indeß alle für die Fortpflanzung der Elektrizität in einer selben Oberfläche.

In Betreff der Wirkung des Magnetismus ist der Gyps nach Plücker ²⁾ ein positiver Krystall, so daß die Mittellinie der beiden optischen Axen sich zwischen den Polen eines Magnets axial stellt. Ich habe vergebens versucht, diese Beobachtung zu bestätigen, obgleich ich mich dazu des großen Elektromagnets nach Plücker's eigener Construction bediente, welcher zu der physikalischen Instrumenten-Sammlung der Universität zu Upsala gehört. Die von der Krystallform abhängige diamagnetische Kraft scheint also beim Gyps nur unbedeutend zu seyn. Nimmt man indeß die Plücker'sche Beobachtung als richtig an, so folgt daraus, daß der Diamagnetismus des Gypses nicht von dem Leitungsvermögen der Oberfläche abhängen kann, weil sonst die diamagnetischen Axen mit denen für das Leitvermögen zusammenfallen müßten. Das von Plücker aufgestellte Gesetz für die optischen Axen: Anziehung bei den positiven, Abstossung bei den negativen Krystallen, hat sich durch die von Knoblauch und Tyndall angestellten Untersuchungen nicht bewährt; statt dessen haben die Letzteren als Hauptregel aufgestellt, daß die magnetischen und diamagnetischen Kräfte eines Krystalls von dessen Blätterdurchgängen abhängen. Diese Ansicht bestätigt sich in so weit bei dem Gyps, als die Linie der größten Härte sich zwischen den Polen eines Magnets axial

1) *Ann. de chim. et de phys.* T. XXVIII. p. 257.

2) *Ib.* T. XXIX. p. 151.

stellt, wenn anders Plücker's Beobachtung richtig ist; aber daraus würde auch folgen, daß der Gyps magnetisch wäre, was andere Beobachtungen widerlegen. Wahrscheinlich ist es indess, daß der Diamagnetismus auf der Dichtigkeitsvertheilung des Aethers beruht; denn gleichwie die Schnelligkeit des Lichts auch von der directen Einwirkung der Molecule bestimmt wird, kann auch zwischen dieser letzteren und dem Diamagnetismus eine vollkommene Entsprechung nicht stattfinden.

VII.

Stellt man die im Vorhergehenden erhaltenen Resultate zusammen, so erhält man folgende Uebersicht von der Lage der verschiedenen Axensysteme in der symmetrischen Ebene wobei α die Neigung zwischen dem faserigen Blätterdurchgang und der Axe bezeichnet, welche innerhalb des spitzen Winkels zwischen beiden Blätterdurchgängen liegt.

	α .
Mittellinie der optischen Axen . . .	14°
Kleinste Ausdehnung durch Wärme .	12
Größte Härte, etwa	14
Magnetische Anziehung, etwa . . .	14
Größtes Leitungsvermögen für Wärme	50
Größte Elasticitätsaxe in akust. Hinsicht	53
Kleinstes Leitvermögen für Elektricität	62.

Merkwürdig ist, daß alle diese Axen hinsichtlich ihrer Richtung in zwei Hauptklassen zerfallen, ohne daß eine Vermittlung zwischen ihnen stattfindet. Da indess die Molecular-Phänomene zuletzt auf einer Wechselwirkung zwischen dem Aether und den eignen Körpermoleculen beruhen, es aber einen wesentlichen Unterschied macht, ob man sich den Aether selbst oder die Körpermolecule als Substrat für die Wirksamkeit ihrer Kräfte denkt, so meine ich, daß gerade dieser Umstand eine Erklärung des angeführten Verhaltens liefere. Licht und strahlende Wärme gehören sonach dem Aether an; die akustischen und thermischen Erscheinungen dagegen den Körpermoleculen. Bemerkens-

werth ist jedoch, dafs das Wärme-Leitungsvermögen und die Ausdehnbarkeit, welche übrigens in einem Gegensatz zu stehen scheinen, in sofern die Ausdehnung in einer gewissen Richtung desto gröfser ist, je kleiner das Leitvermögen, und umgekehrt, dennoch kein gemeinsames Axensystem haben. Indefs läfst sich dieser Umstand leicht erklären dadurch, dafs die Ausdehnung alleinig von dem Gleichgewicht zwischen den anziehenden und abstofsenden Kräften, folglich von deren *relativen* Gröfsen abhängt, während das Leitvermögen von der *absoluten* Gröfse dieser Kräfte und überdies von dem Trägheitsmomente der Theilchen bedingt wird, wenn anders die thermometrische Wärme aus Molecular-Vibrationen besteht.

VIII. Feldspath.

In optischer Hinsicht ist dieser Krystall negativ. Der Winkel zwischen den optischen Axen beträgt nach Brewster 63° , nach Miller $58^{\circ},5$, nach welchem er auch zunimmt mit der Temperatur ¹⁾. Die symmetrische Axe des Krystalls halbirt den angegebenen Winkel, und die Ebene der optischen Axen fällt, nach Miller, zusammen mit der schiefen Base des Prismas aus beiden Blätterdurchgängen. Diese Bestimmung kann nur annähernd richtig seyn, da die optischen Axen eigentlich in verschiedenen Ebenen liegen; auch fand ich an einem, vom Prof. Walmstedt erhaltenen Adularkrystall den Winkel zwischen der Mittelebene der optischen Axen und der schiefen Endfläche $= 4^{\circ},1$ bei $+18^{\circ}$ C. Endlich sind auch von Brewster die Werthe der beiden Brechungscoëfficienten zu 1,764 und 1,536 angegeben.

Die Axen des isothermen Ellipsoïds sind von Senarmont bestimmt; ihre relativen Werthe sind

1, 1,23, 1,25.

Die gröfste fällt mit der symmetrischen Axe des Kry-

1) Pogg. Ann, Bd. XXXVII. S. 366.

stalls zusammen, und die mittlere macht einen Winkel von 59° bis 60° mit der schiefen Base, also 4° (6°) mit der Länge des Prismas.

Um die Lage der akustischen Axen zu bestimmen, liefs ich aus einem vom Prof. A. Svanberg erhaltenen Feldspathkrystall eine kreisrunde Scheibe schleifen, parallel mit der symmetrischen Ebene, welche die zweite Spaltungsfläche des Krystalls bildet. Die beiden Hyperbelsysteme sind in Fig. 10 Taf. II getreu abgebildet; darin bedeutet ab die Länge des Prismas, cd die schiefe Base, ce' die optische Polarisationsaxe und $\varepsilon\varepsilon'$ die thermische Axe.

Wie die Figur zeigt, bildet das eine Hyperbelsystem sehr nahe zwei rechtwinkliche Linien, während das andere sich mehr zwei parallelen Linien nähert; man kann hieraus schliessen, dafs die akustische Hauptaxe der, der Länge des Prisma fast parallelen, imaginären Axe des letzteren Systems sehr nahe kommt, und dafs demzufolge die erste Knotenlinie ausserhalb des spitzen Winkels liegen mufs, welcher von der Länge des Prismas und der schiefen Base gebildet wird.

In der symmetrischen Ebene ist das Leitvermögen für Elektrizität am grössten winkelrecht gegen die Länge des Prismas; in der schiefen Basis ist es dagegen am kleinsten parallel der symmetrischen Axe.

Hinsichtlich des Diamagnetismus ist der Feldspath, nach Plücker, ein negativer Krystall; die Ebene der optischen Axen mufs sich also zwischen den Magnetpolen axial stellen.

Endlich mufs auch in der symmetrischen Ebene die grösste Härte nahe mit der schiefen Base zusammenfallen, dem einzigen Blätterdurchgang, welcher die symmetrische Ebene unter rechtem Winkel schneidet.

Man hat also folgende Uebersicht von der Lage der verschiedenen Axen in der symmetrischen Ebene, wobei α den von den Axen mit der schiefen Base gebildeten Winkel bedeutet.

	α .
Optische Polarisationsaxe	4°,2
Diamagnetische Axe	4,1
Härte	4,1?
Größtes Leitvermögen	60
Akustische Axe	63 +
Kleinstes elektrisches Leitvermögen	63.

Vergleicht man diese Tabelle mit der vorhergehenden beim Gyps, so findet man wiederum dasselbe Verhältniß. Die verschiedenen Systeme bilden abermals zwei gesonderte Gruppen und sind auf gleiche Weise vertheilt, obgleich im Uebrigen mehr Ungleichheiten vorkommen. So ist das Wärme-Leitungsvermögen längs der symmetrischen Axe beim Feldspath am größten, beim Gyps am kleinsten, ferner ist bei einer Temperaturveränderung die Bewegung der optischen Axen einander entgegengesetzt; endlich liegen beim Gyps die thermischen und akustischen Axen näher derjenigen der beiden Polarisationsaxen in der symmetrischen Ebene, welche mit der größten Härte zusammenfällt, während beim Feldspath das Umgekehrte stattfindet, obgleich bei beiden die Elasticität des Aethers entweder *größer* oder *kleiner* als in der winkelrechten Bichtung seyn muß. Geht man nämlich von der Fresnel'schen Definition der Polarisationsebene aus, wornach die Aethertheilchen winkelrecht gegen diese schwingen, so gilt die letztere Annahme, die erstere dagegen, wenn man die Schwingungen in der Ebene selbst geschehen läßt. Diese, für die Theorie höchst interessante Frage hat indess bisher noch nicht auf experimentellem Wege beantwortet werden können¹⁾.

IX.

Aus den eingeschränkten Daten dieser Abhandlung einen Schluß ziehen zu wollen auf die möglicherweise zwischen den optischen, thermischen, akustischen u. s. w. Erscheinungen, wäre sicher voreilig; allein einige Wahr-

1) Sie scheint es indess durch den neulichen Aufsatz von Haidinger S. 131 des vorigen Hefts.

scheinlichkeiten anzuführen, kann ich mich doch nicht enthalten.

Das Wärme-Leitungsvermögen scheint sich am meisten nach der Krystallform zu richten. So findet sich beim Topas, Bournonit, Arragonit und schwefelsaurem Antimon (*svafelsyradt antimon*), welche Prismen mit rhombischer Basis bilden, das gröfsere Leitungsvermögen längs der kleinen Diagonale, und denkt man sich die monoklinoëdrischen Krystalle als rechtwinkliche Prismen mit rhomboïdischer Basis, so fällt auch hier das gröfsere Leitungsvermögen näher an die kleine Diagonale.

Die gröfste Härte und die kleinste Ausdehnung richten sich am meistens nach den Blätterdurchgängen, wenn solche im Krystall vorhanden sind; zu gewissem Grade bestimmen sie auch die Elasticität des Aethers.

Denkt man sich einen Strahl polarisirt in einer Ebene winkelrecht auf der *gröfsten* oder *kleinsten* thermischen Axe, so scheint derselbe, wenn die Temperatur steigt, die *kleinste* oder *gröfste* Veränderung in seiner Schnelligkeit zu erleiden. So beim Gyps, Feldspath, Arragonit und Kalkspath.

X.

Endlich und als Hauptresultat dieser Untersuchung, glaube ich auf experimentellem Wege bewiesen zu haben, *dafs die gewöhnliche Annahme von drei rechtwinklichen Elasticitätsaxen in Krystallen für die monoklinoëdrischen Krystalle unrichtig ist, dafs im Gegentheil nicht allein die Form dieser Krystalle, sondern auch ihre optischen, thermischen und akustischen Erscheinungen unwillkürlich auf das Daseyn schiefwinkliger Elasticitätsaxen, Conjugataxen, hindeuten.*

III. Studien über Thermometrie und verwandte Gegenstände von Plücker und Geisler.

(Mitgetheilt von Plücker.)

§. 1.

Ueber Thermometer, welche, in Beziehung auf die Ausdehnung des Glases, compensirt sind.

1. **D**er Gedanke liegt nah und ist auch nicht neu, eine Glaskugel oder einen Glascylinder theilweise mit Quecksilber zu füllen, um die Ausdehnung des Glases durch die viel stärkere Ausdehnung des Quecksilbers zu compensiren. Der nicht mit Quecksilber angefüllte Raum bleibt alsdann, wie auch die Temperatur sich ändern mag, constant, wobei nur vorausgesetzt werden muß, daß die Ausdehnungs-Coëfficienten für Glas sowohl, als für Quecksilber, für die Temperaturen, innerhalb welcher wir beobachten, dieselben bleiben.

2. Die Construction der compensirten Thermometer, welche, auf meine Veranlassung, Herr Geisler hierselbst angefertigt hat, ist indeß in wesentlichen Punkten eine eigenthümliche.

Erstens. Zur Anfertigung seiner schönen Thermometer nimmt Hr. Geisler überhaupt nicht die gewöhnlichen Thermometerröhren mit dicker Wandung, sondern zieht zu diesem Zwecke selbst Haarröhrchen aus. Von diesen wählt er solche Stücke, die, in Folge einer sorgfältigen Calibrirung, vermittelst Quecksilber, sich in ihrer ganzen Länge als gleich weit erweisen, oder deren unvermeidliche kleine Ungleichheiten bei größerer Länge, nach bekannter Methode, durch die Theilmaschine sich corrigiren lassen. Diese schmelzt er an den das Quecksilber aufnehmenden Cylinder an. An denselben Cylinder wird eine weitere, das Haarröhrchen umschließende Glasröhre angeschmolzen, welche die Scale trägt. Diese ist von weislichem, durchscheinenden Milchglase und auf ihr liegt das Haarröhrchen

unmittelbar auf. Das Ablesen des Standes des Quecksilbers in dem Haarröhrchen wird hierdurch sehr bequem, und, ohne besondere Vorsicht, genau.

3. *Zweitens.* Die Flüssigkeit, welche in den constanten Raum über das zur Compensation dienende Quecksilber gebracht wird und deren wahre Ausdehnung unmittelbar abgelesen werden soll, steigt nicht selbst in die Capillarröhre, sondern drückt, da diese Röhre mit ihrem untern Ende (*e*) bis nahe auf den Grund in das Quecksilber hineintaucht, nur auf dieses, so dafs dasselbe, wenn die Flüssigkeit, in Folge der zunehmenden Temperatur, sich ausdehnt, in der Capillarröhre ansteigt. Man überzeugt sich bald von dem Vorzuge dieser, von Hrn. Geissler herrührenden, Einrichtung, nach welcher, statt des Standes einer leicht verdunstenden und die Röhre benetzenden Flüssigkeit, der Stand des Quecksilbers beobachtet wird.

Um zu verhindern, dafs das zur Compensation dienende Quecksilber in dem Cylinder herumgeworfen werde und die Flüssigkeit oberhalb desselben in das Haarröhrchen dringe, befindet sich dasselbe in einem besondern Cylinder, der innerhalb des bereits erwähnten angebracht ist und blofs an seinem obern Theile mit diesem durch eine feine Oelfnung (*s*) in Verbindung steht. Ein Blick auf Fig. 11 Taf. II. macht die ganze Einrichtung sogleich klar.

4. *Drittens.* Bei der in Rede stehenden Compensation wird nur die Ausdehnung des Quecksilbers als bekannt vorausgesetzt. Die Ausdehnung des Gefäßes, welche von einer Glassorte zur andern und, in geringerem Maafse, von einer Form des Gefäßes zur andern sich ändert, wird nicht, ein für alle Mal, aus der linearen Ausdehnung der angewandten Glassorte abgeleitet, sondern für jedes besondere Instrument auf directem Wege bestimmt. Nachdem zu diesem Ende zuvor schon bei der Calibrirung der Capillarröhre das Gewicht des Quecksilbers, welches eine an einer willkürlichen gläsernen Scale gemessene Länge dieser Röhre, bei einer bestimmten Temperatur, füllte, ge-

wogen worden ist, wird nun erstlich die Quecksilbermenge bestimmt, die bei 0° den ganzen Apparat und die Capillarröhre bis zu einem bezeichneten Punkte ihres untern Endes füllt und dann ferner die Menge desjenigen Quecksilbers, das über diesen Punkt steigt, wenn der Apparat in eine während längerer Zeit constante Temperatur gebracht wird. Es bedient sich bei diesen Abwägungen Hr. Geißler eine seiner Glaswaagen, die noch für $0^{\text{m}5,1}$ einen sehr merklichen Ausschlag geben.

Nennen wir das Gewicht der ganzen Quecksilbersäule G , das Gewicht des über den bezeichneten Punkt ansteigenden g , und die entsprechende Temperatur t° , den Ausdehnungscoëfficienten des Quecksilbers für einen Centesimalgrad q , und endlich das Gewicht des zur Compensation nothwendigen Quecksilbers x , so ergibt sich unmittelbar

$$(G - x) tq = g$$

und hieraus

$$x = G - \frac{g}{tq}.$$

Nebenbei erhalten wir, wenn die scheinbare Ausdehnung des Quecksilbers in dem Glascylinder durch p und die cubische Ausdehnung des innern Raumes dieses Cylinders durch r bezeichnet wird,

$$p = \frac{g}{tG},$$

$$r = q - p.$$

5. Um g zu bestimmen, wurde der Cylinder des Apparates in Wasser getaucht, welches in fortwährender Bewegung-erhalten wurde und dessen Temperatur, an einem feinen Normalthermometer gemessen, längere Zeit constant blieb und eine solche war, die das Quecksilber bis nahe an das Ende der Capillarröhre trieb. Das Steigen des Quecksilbers wurde in Theilen der willkürlichen Scale zugleich mit der Temperatur t° beobachtet und daraus der Werth von g abgeleitet. Bei dieser Ableitung war auf die Temperatur keine Rücksicht zu nehmen, wenn die Capillarröhre und das in derselben befindliche Quecksilber
nahe

nahe dieselbe Temperatur als bei der vorhergegangenen Calibrirung hatten.

Neben dieser Bestimmungsweise wurde bei den späteren Apparaten eine andere ausschliesslich oder gleichzeitig angewendet, welche, namentlich bei sehr empfindlichen Apparaten, welche nur wenig Grade umfassen, mehr Sicherheit giebt. Nachdem auf dem Haarröhrchen der feste Punkt bezeichnet, wurde der Cylinder in die constante Siedhitze des Wassers gebracht, und das Quecksilber, welches auslief, gewogen und so, nach naheliegenden unbedeutenden Correctionen, der Werth von g für $t=100$ gefunden.

Nachdem der, einer bestimmten Temperatur t^0 entsprechende, Werth von g gefunden worden war, wurde das Quecksilber wieder herausgetrieben und diejenige Menge desselben (x), welche zur Compensation dient, abgewogen, in den innern Cylinder durch die Capillarröhre hineingebracht und diese dann zugeschmolzen. Dann wurde eine kurze Röhre (m), welche seitwärts an den äussern Cylinder angeschmolzen und in ein langes Haarröhrchen ausgezogen worden war, geöffnet und der constante vom Quecksilber übrig gelassene Raum mit derjenigen Flüssigkeit, deren wahre Ausdehnung beobachtet werden sollte, gefüllt. War diese Flüssigkeit zum Beispiel Wasser, so wurde dasselbe längere Zeit in dem Apparate gekocht, dann der Apparat, während fortdauernd das zur Füllung dienende Haarröhrchen in Wasser eintauchte, in schmelzenden Schnee gebracht. Wenn die Quecksilbersäule alsdann den bezeichneten Stand hatte, wurde das Haarröhrchen in (m) abgeschmolzen.

6. Schliesslich wurde die willkürliche Scale durch eine andere ersetzt, deren Nullpunkt der bezeichnete Punkt war und deren Theile $\frac{1}{100000}$ des compensirten Volumens ($V-x$) betrug. In analoger Weise wie Réaumur seine Thermometergrade dadurch bestimmte, dass sie der scheinbaren Ausdehnung von $\frac{1}{1000}$ des in der Glaskugel eingeschlossenen Alkohols entsprachen, so entsprechen die

Theile unserer Scale der wahren Ausdehnung von $\frac{1}{100000}$ der den compensirten Raum einnehmenden Flüssigkeit. Füllen wir insbesondere den Apparat ganz mit Quecksilber, so beträgt hiernach ein gewöhnlicher Centesimalgrad etwas mehr als 18 unserer Theile.

§. 2.

Ueber die Ausdehnung des Wassers in der Nähe seiner grössten Dichtigkeit.

7. Die im vorigen Paragraphen beschriebenen, in Beziehung auf die Ausdehnung des Glases compensirten Thermometer geben unmittelbar die Ausdehnung der in den constanten Raum oberhalb des Quecksilbers gebrachten Flüssigkeit. Die beiden ersten dieser Apparate wurden mit ausgekochten destillirtem Wasser gefüllt und gaben, innerhalb weiterer Temperaturgränzen, die Ausdehnung des Wassers durch bloßes Ablesen bis auf $\frac{1}{100000}$ übereinstimmend. Um diese Uebereinstimmung, wie befriedigend sie auch war, noch gröfser zu machen, traten uns anfänglich praktische Schwierigkeiten entgegen. Diese wurden aber beseitigt, und so entstanden zwei neue, etwas modificirte Apparate, an welchen jeder Scalentheil eine Ausdehnung von $\frac{1}{100000}$ des Volumens bei 0° unmittelbar angab und so grofs war, dafs noch Zehntel desselben bequem geschätzt werden konnten. Indem diese Apparate die Ausdehnung des Wassers von -4° bis $+12^{\circ}$, den Gränztemperaturen, die beobachtet werden können, bis auf $\frac{1}{100000}$ übereinstimmend anzeigen, legen sie von der Genauigkeit, mit welcher Hr. Geifslers seine Bestimmungen ausgeführt hat, das beste Zeugniß ab. Ich meinerseits fand darin die Aufforderung, die Ausdehnung des Wassers nochmals zu bestimmen: eine Arbeit, die ich, bei dem besonderen Interesse, das die Ausdehnung des Wassers, namentlich in der Nähe seiner grössten Dichtigkeit, bietet, auch nach den bereits vorliegenden sorgfältigen Arbeiten über denselben Gegenstand, nicht für werthlos halte.

8. Die bezeichneten Schwierigkeiten bestanden *erstens* in der Capillartwirkung zu enger Röhren, *zweitens* in der Langsamkeit und Ungleichmäßigkeit, mit welcher das Wasser, namentlich in der Nähe seiner grössten Dichtigkeit, die Temperatur seiner Umgebung annimmt, und *drittens* in der verschiedenen Compression, welche die steigende Quecksilbersäule auf die eingeschlossenen Flüssigkeiten und durch diese auf die innere Wandung des Glasgefäßes ausübt.

Was den ersten Punkt, die Capillarität betrifft, so stellte sich heraus, daß die angewandten Röhren nicht viel feiner genommen werden durften. Eine Capillarröhre, welche Milliontel abzulesen gestattete, während der constante mit Wasser angefüllte Raum nicht größer war, als daß er nicht ganz 10^{er} Quecksilber faßte, gab einen merklich verschiedenen Stand der Quecksilbersäule, je nachdem diese gestiegen oder gesunken war und dieser liefs sich auch nicht durch Erschütterung der Röhre auf einen festen Stand bringen. Eine größere Genauigkeit konnte daher nur durch größere Dimensionen des Behälters erreicht werden. Hierbei erschien es aber, mit Rücksicht auf die zweite Schwierigkeit, nothwendig, ein Thermometer in den Behälter selbst hineinzubringen, welches die Temperatur des sich ausdehnenden Wassers direct anzeigte. In dem zuletzt angefertigten Apparate (A) Fig. 12 Taf. II.) befindet sich das Thermometer (*a*), dessen Behälter die Form eines langen dünnen Cylinders hat, innerhalb eines zweiten, oben offenen, Cylinders (γ), umgeben von dem zur Compensation dienenden Quecksilber. Dieser zweite Cylinder wird seinerseits ganz von dem Wasser, dessen Ausdehnung beobachtet werden soll, umgeben und ist, damit das in demselben befindliche Quecksilber nicht umher geworfen werde, mit einer gläsernen, cylinderförmigen Kappe *U* bedeckt, welche mit dem obern Halse des äußern Cylinders *W* zusammengeschmolzen ist.

Auf diese Weise wird eine gleichmäßigere Erwärmung dieses Wassers durch die bessere Leitungsfähigkeit des Quecksilbers erreicht und die Temperatur sicherer bestimmt,

als wenn, wie bei dem Apparate (B) Fig. 13 Taf. II., das Thermometer (b) bis zu einer bestimmten Tiefe in das Wasser hineinreicht und das Quecksilber den untern Raum des Behälters einnimmt.

9. Drittens ist es von Vorne herein klar, dafs das Ansteigen der Quecksilbersäule eine Zusammendrückung des Wassers und des Quecksilbers in dem Glasbehälter, so wie eine Ausdehnung dieses letztern hervorbringen mufs und dafs, in Folge dieser übereinstimmenden Wirkung, bei höhern Stande der Quecksilbersäule die Ausdehnung des Wassers durch die Wärme zu niedrig abgelesen wird. Der hauptsächlichste Theil dieser Wirkung kommt auf die Zusammendrückbarkeit des Wassers, und diesen können wir, in der Voraussetzung, dafs die Capillarität den Druck der Quecksilbersäule bei jedem Stande derselben in constanter Weise modificire, direct bestimmen. Setzen wir nämlich für einen Atmosphärendruck die Zusammendrückbarkeit des Wassers gleich 0,000048 des Volumens bei 0°, so erhalten wir für jedes Ansteigen unserer Säule um 100^{mm} eine Verminderung des Volumens von 6,52 unserer Scalentheile, was für die ganze Länge unserer Scalen, die Correction bis auf 20 Theile (20 Milliontel des Volumens bei 0°) bringen würde.

Um die Richtigkeit unserer Voraussetzung zu bestätigen brauchen wir nur der Röhre, in welcher das Quecksilber ansteigt, bei unveränderter Temperatur, verschiedene Neigung zu geben. Bestimmen wir den Nullpunkt bei verticaler Lage, so steigt derselbe, wenn wir die Röhre in die horizontale Lage bringen, um eine Anzahl von Theilen, die wir h nennen wollen. Bestimmen wir hiernach den Stand der Quecksilbersäule bei irgend einer höhern Temperatur in verticaler Lage und neigen dann, wie vorhin, so steigt die Quecksilbersäule wiederum um eine bestimmte Anzahl von Theilen, diese sey k . Alsdann er giebt sich als Correction des verticalen Standes für jeden Theil $\frac{k-h}{k}$, für jeden abgelesenen Stand $\pm M$ also $M \left(\frac{k-h}{k} \right)$.

Hierbei wird von demjenigen Stande des Wassers, wie er bei 0° und verticalem Stande stattfindet, als dem ursprünglichen ausgegangen ¹⁾).

Die vorstehende theoretische Bestimmung verlangt eine experimentale Bestätigung. Wir haben diese einstweilen dadurch beseitigt, daß wir an unsern Apparaten die Röhre, in welcher das Quecksilber ansteigt, umgebogen haben und immer in horizontaler Lage beobachten.

10. Unbeachtet darf hiernach auch die Veränderung des Druckes auf das freie Ende der Quecksilbersäule nicht bleiben. Bei der horizontalen Lage derselben wäre es nicht rathsam diesen Druck durch Luftleermachen der Röhre ganz fortzuschaffen; denn alsdann wäre die Cohäsion des Quecksilbers die einzige Kraft, welche den Faden desselben zurückführte. Wir könnten die Röhren oben offen lassen, dann bestände die Veränderung bloß in den Schwankungen des Barometerstandes. Statt dessen ist an unsern Apparaten ein größerer Behälter (*u*) angeschmolzen, groß genug, damit das Vorrücken der Quecksilbersäule keine merkliche Compression der eingeschlossenen Luft hervorbringe. Diese Luft ist verdünnt, damit die steigende Temperatur den absoluten Druck derselben weniger vermehre. Eine desfallsige Correction ist für die später mitzutheilenden Beobachtungen nicht erforderlich.

11. Nur über die Bestimmung des Apparates *A* füge ich einige ausführlichere Bemerkungen bei. Nachdem der Apparat so weit vollendet war, daß nur noch in *d* das calibrierte Haarröhrchen angesetzt, und dieses mit einer anzuschmelzenden weitem Glasröhre umgeben, und mit einer Scale versehen zu werden brauchte, wurde der ganze innere Raum mit Quecksilber gefüllt und ausgekocht. Dann

- 1) Wenn, bei verschiedenen Apparaten, die Haarröhrchen, in welchen das Quecksilber in Folge der Ausdehnung des Wassers ansteigt, gleich weit sind, so müssen dieselben, welches auch ihr constanter Rauminhalt seyn möge, in verticaler Lage (so wie in horizontaler) übereinstimmend gehen. Dann ist nämlich $\frac{k-h}{k}$ für alle Apparate gleich und also die Correction dieselbe.

wurde die feine Oeffnung (*m*) zugeschmolzen und der Apparat in Schnee gestellt, während das in den unteren Theil des Cylinders mündende Haarröhrchen *cd* mit seinem obern Ende *d*. so lange in Quecksilber eintauchte, bis der Apparat die Temperatur vollständig angenommen hatte. In siedendes Wasser gebracht, lief dann aus *d* eine gewisse Quecksilbermenge aus, deren Gewicht (*g*) bestimmt wurde. Der Apparat wurde hierauf nochmals in Schnee gebracht, wieder vollständig bei 0° gefüllt und die vorige Operation wiederholt. Es ergab sich hierbei

$$\begin{aligned} g &= 4^{\text{sr}}, 1087 \\ &= 4 \text{ , } 1092 \\ \text{Mittel} &= 4 \text{ , } 1090. \end{aligned}$$

Die Temperatur, bei welcher das Wasser siedete, wurde durch ein Barothermometer, dessen Grade in 200 Theile getheilt waren, zu

$$99^{\circ}, 92$$

bestimmt. Auf $t=100$ reducirt, ergiebt sich hiernach

$$g = 4^{\text{sr}}, 1123.$$

Das Quecksilber wurde hiërauf vollständig wieder aus dem Apparate hinausgetrieben und das Gewicht *G* derjenigen Quecksilbermenge, welche denselben bei 0° füllte, bestimmt. Es fand sich

$$G = 268^{\text{sr}}, 4853.$$

(Die Wägung war einigermaßen und für unsere Zwecke vollständig durch eine frühere controlirt, indem eine bestimmte Menge Quecksilber ursprünglich gewogen und wieder gewogen wurde, nachdem aus ihr der Apparat gefüllt worden war. Aber bei der Füllung gingen einige Tropfen Quecksilber verloren, die zu 0^{sr},2 geschätzt wurden. Das Gewicht derselben ist aber von dem gefundenen Werthe

$$G = 268^{\text{sr}}, 705$$

abzuziehen.)

Für den Ausdehnungs-Coëfficienten des Quecksilbers wurde, nach Regnault, angenommen

$$q = 0,00018153$$

und hiernach gab die Rechnung für den constanten Raum

$(G - x)$ und für das zur Compensation erforderliche Quecksilber x :

$$G - x = \frac{g}{100 \cdot q} = 226^{\text{sr}},536$$

$$x = 41^{\text{sr}},949.$$

Der Inhalt des in d anzublasenden Haarröhrchens, das sich, in Gemäfsheit der Calibrirung, als überall gleich weit erwiesen hatte, wurde ebenfalls zweimal bestimmt. Es wogen, an einer willkürlichen Scale gemessen,

1156 Theile Quecksilber $0^{\text{sr}},1122$

808 " " 0 ,07838.

Dieses giebt auf jeden Theil

0,0009706

0,00097005

Mittel 0,0009703.

Da jeder Theil der anzufertigenden Scale $\frac{1}{1000000}$ des constanten Volumens $(G - x)$ anzeigen soll, so kommt auf ihn

$$0^{\text{sr}},00226536$$

Quecksilber, und somit ist das Verhältnifs der Theile dieser und der willkürlichen Scale

$$\lambda = \frac{226536}{9703} = 23,553.$$

Da endlich 100^{mm} gleich 342 Theile der willkürlichen Scale sind, so ist hiernach jeder Theil der Scale unseres Apparates gleich

$$6^{\text{mm}},89.$$

12. Die oben bestimmte zur Compensation erforderliche Quecksilbermenge (x) wurde durch die Oeffnung bei d in den zu ihrer Aufnahme bestimmten Cylinder γ hineingebracht, das calibrierte Haarröhrchen dz , so wie die dasselbe umgebende weitere Röhre angeschmolzen und, nachdem beide Röhren zusammen umgebogen, in letztere die willkürliche Scale hineingesteckt. Dann wurde durch den kleinen Ansatz m , der wieder zu einem feinen Haarröhrchen ausgezogen wurde, der Apparat mit Wasser gefüllt, dieses Wasser längere Zeit hindurch gekocht und endlich,

bei gehöriger Wiedererhaltung, die Spitze aus dem Wasser herausgezogen und zugeschmolzen. Der Apparat mußte so oft von Neuem geöffnet und, nach Hineinlassung oder Herauslassung von Wasser, vermittelst schicklicher Aenderung der Temperatur, wieder zugeschmolzen werden, bis, nach Erkaltung auf 0° , das Quecksilber etwa bei 0 stand. Dann war der Nullpunkt der Scale, welche die willkürliche schließliche ersetzte, und somit die Scale selbst vollkommen bestimmt. Sie erstreckte sich von -15 bis $+40$. Das Thermometer *a* ist in $\frac{1}{30}$ Grade getheilt und läßt Hundertel-Grade mit Sicherheit ablesen. Es geht von $-4,5^{\circ}$ bis $+14^{\circ}$.

13. Die Bestimmung des Apparates *B* ergab bei gleicher Bezeichnung:

$$g = 5^{\text{sr}},1589$$

$$G = 336,123$$

$$G - x = 284,190$$

$$x = 51,933$$

und

$$\lambda = 22,157.$$

14. Bei den Beobachtungen, die mit den Apparaten *A* und *B* angestellt wurden, kam es hauptsächlich auf eine genaue Temperatur-Bestimmung an. Zu diesem Ende wurde eine Bütte 440^{mm} weit und 300^{mm} tief mit Wasser angefüllt und dieses durch eine schickliche Vorrichtung in fortwährender Bewegung erhalten, wodurch namentlich eine Mischung der verschiedenen horizontalen Schichten erreicht wurde. Aufser den beiden genannten Apparaten, die auf einem Brettchen sich so befestigen ließen, daß die Scale immer genau dieselbe horizontale Lage annahm, tauchten noch zwei Thermometer in das Wasser ein. Diese beiden Thermometer, von welchen das eine in $0^{\circ},01$, das zweite in $0^{\circ},04$ Grade getheilt war, gingen unter einander und mit dem Thermometer *a* des Apparates *A*, bis auf $0^{\circ},01$ genau, überein.

Es war leicht, wenn die Temperatur der Umgebung nicht zu sehr von der Temperatur des Wassers abwich,

diese eine Viertel-Stunde lang und länger constant zu erhalten. Die Beobachtungen wurden gemacht, wenn diese Constanz erreicht war, und dann erst, wenn das Thermometer *a* anzeigte, daß auch das Wasser innerhalb des Apparates *A* dieselbe Temperatur angenommen hatte. Durchgehends war die Uebereinstimmung des innern und der beiden äußern Thermometer eine vollständige. Niemals betrug der Unterschied mehr als $0^{\circ},01$; war ein solcher vorhanden, so wurde die Temperatur, die das erstgenannte Thermometer (*a*) anzeigte, als die richtige genommen. Leider war das Thermometer (*b*) des Apparates *B* unbrauchbar geworden und konnte nicht, ohne den ganzen Apparat von Neuem zu bestimmen, wieder in Stand gesetzt werden. Es waren aber die beiden Apparate *A* und *B* dicht neben einander gleichmäÙig ins Wasser eingesenkt, und wenn auch der Apparat *B* in der Annahme der Temperatur etwas zurückblieb, so konnte dieses durchgehends doch nur eine verschwindende GröÙe seyn.

15. Es versteht sich von selbst, daß auf die Verrückung des Nullpunktes bei allen Apparaten fortwährend Rücksicht genommen worden ist. Sie blieben so viel als möglich während der ganzen Zeit, daß die Versuche dauerten, in Wasser eingetaucht und es wurde vermieden, diesem plötzlich eine andere Temperatur zu geben. Es stellte sich hierbei auffallender Weise heraus, daß der Nullpunkt des Thermometers *a*, seit der Anfertigung des Apparates bis mehrere Monate nachher auch nicht um $0^{\circ},01$ hinaufrückte. Dagegen veränderte sich das Glas des äußern Cylinders des Apparates *A*, wie gewöhnlich, wodurch der Nullpunkt der horizontalen Scale fortwährend stieg. Dieses Steigen des Nullpunktes erwies sich — der Apparat war seit zwei bis drei Wochen geblasen und gefüllt — während der Versuchswoche als ziemlich regelmäÙig, und betrug täglich $0,5$ Theile unserer Scale, das heißt, wenn der ganze Apparat mit Quecksilber gefüllt gewesen wäre, $\frac{1}{363}$ Centesimalgrad.

16. In jeder der sieben angestellten Beobachtungs-

reihen waren die Temperaturgränzen, innerhalb welcher beobachtet wurde, wenig von einander entfernt. Die stufenweise Erhöhung oder Erniedrigung der Temperatur des Wassers in der Bütte bewirkten wir dadurch, daß grössere Mengen desselben durch nur um wenig wärmeres oder um wenig kälteres Wasser ersetzt wurden. Das Wetter zur Zeit der Beobachtungen gestattete die Temperatur der Umgebung passend zu wählen. Ich habe die Versuchsreihen nach der, zum Theil durch die Umstände bestimmten Aufeinanderfolge, in der sie angestellt wurden, bezeichnet; ich theile sie in dem Nachstehenden, ohne irgend eine Correction als die durch die Verrückung der Nullpunkte gebotene, nach den Temperaturen geordnet, mit.

Beobachtungs-Reihe IV.

Die Bütte mit Wasser wurde für die tiefern Temperaturen durch eine 250^{mm} weite und 300^{mm} tiefe mit Alkohol angefüllte Glasglocke ersetzt, und der Alkohol in derselben in fortwährender Bewegung gehalten. Anfänglich wurde die Glocke mit den beiden Apparaten *A* und *B* und einem Thermometer ins Freie gestellt. Der Alkohol nahm eine immer tiefere Temperatur an, die zuletzt sehr langsam sank und ein Minimum erreichte, das sich längere Zeit erhielt. Hier wurden die ersten Beobachtungen gemacht; Vorher aber, bei etwa $-3^{\circ},60$ gefror ein Theil des Wassers in dem Apparate *B*, wobei das Quecksilber mit großer Gewalt in den Behälter drang, welcher der Capillarröhre angeschmolzen war. Der Apparat *B* wurde herausgenommen und erst später, nachdem die Temperatur gestiegen war, wieder eingesetzt. Aus dem Freien wurde die Glocke mit den Apparaten in eine ungeheizte Stube mit offenen Fenstern gebracht, deren Temperatur durch allmähiges Schließsen der letztern stieg. Der kalte Alkohol wurde bei den spätern Bestimmungen theilweise durch Alkohol von 0° ersetzt und auf diesem Wege ergaben sich auf längere Zeit constante Temperaturen. Nach längern Intervallen wurde einige Mal bei nahe liegenden Temperaturen beobachtet, und dann das Mittel genommen.

Therm. <i>a.</i>	Apparat <i>A.</i>	Apparat <i>B.</i>	Bemerkungen.
- 3°,87	+ 386,5		Außere Temperatur — 4° bis — 3°,9. Die Beobachtungen wurden in umgekehrter Ordnung gemacht.
3,82	379,5		
3,76	372,5		
3,74	368,5		
3,72	364,5		
3,70	362,5		
3,68	359,5		
3,64	354,5		
Mittel			
- 3,74	368,5		
- 3°,02	+ 274,5		Außere Temp. — 3° bis — 2°,7.
2,84	252,5		•
2,77	246,5	+ 244	Der Apparat <i>B</i> hatte die Tem- peratur noch nicht ganz angenom- men.
Mittel			
- 2,88	254,3		
- 2°,28	+ 191,5	+ 191	Außere Temp. — 2°,3.
2,26	190	190	
Mittel			
- 2,27	190,7	190,5*	*Hier ist ein offener Ablesungs- fehler von 10 Theilen corrigirt.
- 1°,95	+ 158	+ 158	
- 1,36	+ 103,5	+ 104	
1,34	102	102	
Mittel aus den beiden letzten Bestimmungen.			
- 1,35	102,7	103	
- 0°,93	+ 64,5	+ 66	Außere Temp. — 0°,46.
- 0,87	63,5	64	
Mittel			
- 0,90	64	65	
- 0°,48	+ 33,5	+ 34,5	Außere Temp. — 0°,06.

Beobachtungsreihe VII.

0°	0	0	Alle folgenden Bestimmungen in der großen Wasserbütte.
+ 0°,55	- 33	- 32,5	
1,00	55,5	54,4	
1,54	76,7	76,5	
2,00	91,8	91,5	
2,60	105	105,5	
3,00	111,5	111,5	

Beobachtungsreihe I.

+ 2°,60	- 104,5	- 104,5	Die Beobachtungen dieser Reihe wurden in umgekehrter Ordnung angestellt.
2,79	107,8	108,6	
2,99	110,5	110,8	
3,195	112,6	113,1	
3,40	113,7	114,6	
3,60	114,1	115,6	
3,80	114,3	115,5	
4,00	114,3	115,5	

Therm. a.	Apparat A.	Apparat B.	Bemerkungen.
Beobachtungsreihe II.			
+4°,00	-114,2	-114,0	
4°,20	113,6	113,8	
4°,40	111,8	111,6	
4°,60	109,5	109,5	
4°,80	106,5	107,0	
5°,02	103,2	103,0	
5°,21	99,3	99,6	
5°,41	94	94,5	

Beobachtungsreihe VI.			
+5°,02	-103,2	-103,6	Die Beobachtungen dieser Reihe wurden in umgekehrter Ordnung gemacht.
5°,52	91,5	92,7	
6°,02	78,5	77,5	
6°,52	57,5	58,0	
7°,02	35,9	35,8	

Beobachtungsreihe III.			
+7°,00	-36	-36,9	
7°,21	-25,1	-25,5	
7°,40	-15	-15,7	
7°,60	-5	-4,8	
7°,81	+7	+7,1	
8°,015	+19	+18,7	
8°,22	+33	+32,2	
8°,41	+46	+45,2	

Beobachtungsreihe V.			
+8°,42	+46,5	+46,5	
9°,02	88,5	88	
9°,52	128,7	129	
10°,02	171,5	171,3	
10°,52	217,5	217,5	
11°,02	268,2	266,2	Die Röhre des Apparates B hörte auf calibrirt zu seyn.
11°,52	320,3	—	
11°,90	366,5	—	

17. Nach längerer Zeit wurden nachträglich noch zwei Bestimmungen wiederholt. Die erste betraf die Temperatur Δ° , bei welcher das Wasser wieder genau dieselbe Dichtigkeit annimmt, die es bei 0° hat. Nach der Beobachtungsreihe III liegt der Werth von Δ zwischen 7,60 und 7,81 und wir finden, wenn wir interpoliren, übereinstimmend für beide Apparate A und B,

$$\Delta = 7,69.$$

Die neuen mit dem Apparate *A* angestellten Beobachtungen ergaben

Thermometer <i>a.</i>	Apparat <i>A.</i>
+ 7°,94	+ 15
7,72	+ 3,5
7,50	— 7

wobei die unmittelbar darauf gemachte Correction des Nullpunkts aufgenommen ist. Interpoliren wir, so kommt $\Delta = 7,65$.

18. Die zweite Bestimmung betraf die grösste Dichtigkeit. Es ergab sich

Thermometer <i>a.</i>	Apparat <i>A.</i>	Apparat <i>B.</i>
3°,70	— 116	— 115
3,83	— 116	
3,96	— 116	

Diese Bestimmung wurde in etwas modificirter Weise gemacht. Wenn man nämlich die Glasröhre mit der Scale des Apparates *A* in dem einen oder andern Sinne um etwa 30° neigt, so kommt die Quecksilbersäule nicht mehr auf den frühern Stand zurück, selbst nicht nach wiederholten Erschütterungen des Apparates. Die unmittelbare Beobachtung gab die folgenden doppelten Ablesungen

— 101,5	— 103,5
— 102	— 103
— 102	— 103.

Aus diesen ist das Mittel genommen worden, welches nach der unmittelbar vorher in gleicher Weise bestimmten Correction des Nullpunktes, die — 13,5 betrug, das vorstehende Resultat gab. Der Apparat *B* hatte während der ganzen Zeit der Beobachtung seine feste Lage behalten.

Das Mittel aus den beiden frühern und den beiden vorstehenden Bestimmungen

— 114,3	— 115,5	— 116	— 115
---------	---------	-------	-------

giebt der grössten Dichtigkeit entsprechend:

— 115,5.

19. Die kleinen Abweichungen liegen hauptsächlich in der Art, wie die Bestimmungen gemacht wurden. Diese muß vor Allem eine gleichmäßige seyn. Störend ist ebenfalls die fortwährende Veränderung des Nullpunktes der Scale. Wenn diese nach Jahr und Tag unmerklich geworden seyn wird, ist eine Wiederholung der Versuche, namentlich in der Nähe der größten Dichtigkeit, gewiß erwünscht. Der Vortheil der von uns angewandten Bestimmungsweise liegt hauptsächlich auch darin, daß die Apparate bleiben, die gemachten Beobachtungen in jedem Augenblicke bestätigt und die Fehler durch Vervielfältigung der Beobachtungen so gut wie ganz eliminirt werden können.

20. Die Temperatur der größten Dichtigkeit ist eine Constante, die aus der Discussion aller Beobachtungen in ihrer Nähe durch Rechnung abgeleitet werden muß; sie kann mit einiger Genauigkeit direct nicht beobachtet werden. Sie scheint nahe bei $3^{\circ},80$ zu liegen; für practische Zwecke ist hier ein weiterer Spielraum gegeben, unbeschadet der Genauigkeit kann sie auch bei 4° angenommen werden. Um uns hiervon zu überzeugen, können wir, in der Nähe des Punktes der größten Dichtigkeit, diejenige Curve, welche die Ausdehnung des Wassers als Function der Temperatur darstellt, annäherungsweise als eine Parabel betrachten, die sich, von jenem Punkte aus, symmetrisch nach beiden Seiten hin erstreckt, und wir können diese Parabel durch diejenigen beiden Punkte, in welchen die Ausdehnung Null ist, vollständig bestimmen. Nehmen wir Milliontel des Volumens und Hundertel-Grade als Einheiten, so ergibt sich hiernach für die Gleichung dieser Curve:

$$y^2 = \frac{(383,5)^2}{115,5} \cdot x = 1274 x$$

hieraus berechnet sich, für eine Zunahme oder Abnahme der Temperatur der größten Dichtigkeit von $0^{\circ},1$, eine Aenderung des Volumens von noch nicht $0,1$, und für eine Temperaturänderung von $0^{\circ},35$ nach jeder der beiden Seiten hin beträgt diese Aenderung noch keine ganze Einheit.

21. Die vorstehenden Beobachtungen verlangen eine Correction, die darin begründet ist, dafs der, in Beziehung auf Ausdehnung durch die Wärme, compensirte Raum dann nicht mehr vollständig compensirt bleibt, wenn in Folge dieser Ausdehnung ein Theil des Quecksilbers aus dem innern Behälter herausgetrieben wird. Bezeichnen wir wie bisher, das Volumen des Wassers bei 0° durch 1000000, so giebt unsere Scale durch unmittelbare Ablesung für jede Temperatur t° die Volumentheile e , um welche der compensirte Raum sich verändert hat. Der beobachtete Stand e erleidet folglich die Correction $de = eqt$ und wird

$$e(1 + qt).$$

Wir erhalten hiernach

Temperatur t .	Ausdehnung e .	Correction de
— $3^\circ,87$	+ 386,5	— 0,28
— 0°	0	0
+ 4°	— 115,5	— 0,08
+ Δ°	0	0
+ $11^\circ,90$	+ 366,5	+ 0,78

Die fragliche Correction ist also, innerhalb der Gränzen unserer Beobachtungen, fast zu vernachlässigen.

22. Wenn wir die Menge des Quecksilbers in unsern Apparaten, wie bisher, durch x bezeichnen, so giebt, auch wenn diese eine ganz beliebige, nicht die gerade zur Compensation erforderliche ist, der beobachtete Stand, für eine bestimmte Temperatur t , die Summe der Ausdehnungen des Quecksilbers x und des Wassers ($G - x$), vermindert um die Ausdehnung des innern Raumes G . Es ist, indem wir die frühere Bezeichnung beibehalten und überdiess die Ausdehnung des Wassers von 0° bis t° durch W_t bezeichnen:

$$xtq + (G - x)W_t - Gtr = e \quad (1.)$$

In dieser Gleichung können wir die Volumina x , ($G - x$) G und e durch Quecksilbergewichte ausdrücken, oder auch durch eine beliebige Einheit. Wenn wir für diese letztern insbesondere $\frac{G - x}{1000000}$ nehmen, so wird e in Theilen unserer

Scalen unmittelbar abgelesen. Wir wollen die zur Compensation erforderliche Quecksilbermenge durch x' unterscheiden, und

$$x' - x = dx$$

setzen, indem wir den Unterschied klein annehmen.

Dann ergibt sich, wenn der entsprechende Stand durch e' bezeichnet wird

$$\begin{aligned} t(x'q - Gr) &= 0 \\ (G - x')W_i &= e'. \end{aligned}$$

Die Gleichung (1) geht hiernach in folgende über:

$$e' = e + (tq - W_i)dx$$

und giebt

$$de = (tq - W_i)dx \quad (2)$$

für die Correction des beobachteten Standes e , der einem Fehler dx in der Bestimmung der zur Compensation dienenden Quecksilbermenge entspricht. Diese Gleichung ergibt sich unmittelbar, wenn wir die Gleichung (1) differentiiren und dabei e als Function von x betrachten.

23. Der Fehler, welchen wir in der Abwägung von x begehen, kann hier ganz vernachlässigt werden. Die Berechnung des Werthes von x beruht aber auf der Gleichung:

$$G - x = \frac{g}{t} \cdot \frac{1}{q} \quad (3)$$

und hängt von Constanten ab, deren Bestimmung Fehler einschließt.

Betrachten wir zunächst den Fehler in der Abwägung derjenigen Quecksilbermenge g , die ausfließt, wenn der ganze mit Quecksilber angefüllte Apparat von 0° bis 100° erwärmt wird, so kommt, wenn wir die vorstehende Gleichung, in der hier $t=100$ zu setzen ist, in Beziehung auf d und g differentiiren

$$dx = -\frac{dg}{100q} = -55,08 dg.$$

Die doppelte Abwägung hat uns die Sicherheit gegeben, dafs

$$dg < 0^{\text{er}},001$$

oder

oder in unsern Einheiten ausgedrückt und abgesehen vom Zeichen,

$$\text{für den Apparat } A < 4,41 \left(= \frac{1}{0,226531} \right)$$

$$\text{„ „ „ } B < 3,87 \left(= \frac{1}{0,284190} \right).$$

Der entsprechende Fehler in der Bestimmung von x giebt hiernach bezüglich

$$dx < 243$$

$$dx < 213.$$

24. Ferner machen wir einen Fehler in der Bestimmung des Fundamental-Abstandes. Differentiiren wir hiernach die Gleichung (3) in Beziehung auf t , so kommt

$$dx = \frac{g}{tq} \frac{dt}{t} = (G - x) \frac{dt}{t} = 10000 dt$$

also für einen Fehler von $0^{\circ},01$, den wir wahrscheinlich nicht machen:

$$dx = 100.$$

Innerhalb unserer Beobachtungsgränzen finden wir

t .	$(tq - W_i)$.
— $3^{\circ},87$	— 0,001089
0	0
+ 4	+ 0,000611
+ 7,83	+ 0,001421
+ 11,90	+ 0,001793.

Bei den *höchsten* von uns beobachteten Temperaturen, wo auch die Beobachtungsfehler am größten sind, ist hiernach für einen Fehler von $0^{\circ},01$ bei der Bestimmung der Siedtemperatur der Beobachtungsfehler de für beide Apparate

$$0,1793;$$

für den größten Fehler in der Abwägung von g jedenfalls

$$\text{für den Apparat } A < 0,44$$

$$\text{„ „ „ } B < 0,38.$$

Die Genauigkeit unserer Bestimmungsweise läßt also nichts zu wünschen übrig: unsere Apparate geben, richtig

abgelesen, Milliontel der Ausdehnung des Wassers mit Sicherheit an.

25. Eine letzte Fehlerquelle liegt endlich in der Bestimmung des Ausdehnungs-Coëfficienten des Quecksilbers. Wir haben nach Regnault

$$q = 0,00018153$$

gesetzt. Dulong und Petit hatten

$$q = 0,00018018$$

gefunden, wonach

$$dq = -0,00000135,$$

wenn wir vom ersten Werthe zum zweiten übergehen.

Vermittelst des Werthes von q erhalten wir den Ausdehnungs-Coëfficienten r für den innern Raum unserer Apparate, nachdem wir zuvörderst den Coëfficienten der scheinbaren Ausdehnung des Quecksilbers in diesem Raum bestimmt haben. Nach den Formeln:

$$p = \frac{g}{G} \quad r = q - p$$

finden wir:

	p .	r .
Apparat A	0,00015317	1,00002836
" B	0,00015348	1,00002805.

Wenn wir die Fehler der Abwägung von g , mit Einschluss des Fehlers der Temperaturbestimmung gleich $0^{\text{r}},01$ setzen, so hat dieser Fehler nur auf die letzte Decimale einen Einfluss. Die scheinbare Ausdehnung würde dadurch nämlich in den beiden Apparaten bezüglich um

$$\frac{1}{4112} \text{ und } \frac{1}{5159}$$

geändert. Wir können daher den Fehler als nicht vorhanden ansehen; somit ist

$$dr = dq,$$

wonach der Fehler in der Bestimmung von q sich unmittelbar auf die Bestimmung von r überträgt.

26. Differentiiren wir den Werth von e (1) vollständig in Beziehung auf q , indem wir berücksichtigen, dass auch x Function von q ist, so kommt

$$de = td.xq - W.dx.$$

Es giebt aber die Gleichung (3)

$$dx = \frac{g}{100q} \cdot \frac{dq}{q} = (G - x) \frac{dq}{q}$$

$$= 5508000000 \, dq$$

$$d \cdot xq = G \, dq,$$

und wenn wir diese Werthe in die letzte Gleichung einsetzen:

$$de = (Gt - 5508000000 \, W_1) \, dq$$

$$= \left(\frac{G}{G-x} \cdot t - 5508 \, W_1 \right) 1000000 \, dq.$$

Es ist ferner

$$1000000 \, W_1 = e$$

und

$$\frac{G}{G-x} = \frac{q}{p} = 1,184.$$

Bei der Evaluirung des letzten Ausdrucks haben wir die Ausdehnung des Glases unserer beiden Apparate gleich vorausgesetzt und für p den mittleren Werth genommen.

Es kommt hiernach, indem wir

$$dq = 0,000001$$

nehmen

$$de = 1,184 \cdot t - 0,005508 \, e.$$

Es ergibt sich innerhalb unserer Beobachtungsgränzen bei der Ausdehnung des Glases unserer Apparate

$t.$	$de.$	$-1,35 \, de.$
- 3°,87	- 6,71	- 9,06
0	0	0
+ 4	+ 4,54	- 6,14
+ 7 ,66	+ 9,08	- 12,26
+ 11 ,52	+ 11,86	- 16,01
+ 11 ,90	+ 12,07	- 16,30.

Wir ersehen hieraus, wie eine geringe Aenderung des angenommenen Ausdehnungs-Coëfficienten des Quecksilbers oder, was ganz auf dasselbe hinausläuft, eine gleiche Aenderung des Ausdehnungs-Coëfficienten des Glases, namentliche Abweichungen in der Bestimmung der Ausdehnung des Wassers hervorbringt, Abweichungen, die unvergleichlich gröfser sind, als diejenigen, welche den Feh-

lern in der Bestimmung unserer Apparate und den Fehlern unserer Beobachtungen entsprechen.

27. Wir haben früher denjenigen Werth von t , bei welchem das Wasser wiederum dasjenige Volumen einnimmt, welches es bei 0° hatte, durch Δ bezeichnet. Dieser Werth ändert sich zugleich mit dem für q angenommenen Werth. Um diese Aenderung, $d\Delta$, zu bestimmen, wollen wir e als Function von t betrachten. Dann können wir aus den Beobachtungen in der Nähe der fraglichen Temperatur den Werth von $\frac{de}{dt}$, welcher dieser Temperatur entspricht, bestimmen, oder diesen Werth auch aus der graphischen Darstellung dieser Function durch Messung ableiten. Wir wollen, für unseren nächsten Zweck mit ausreichender Annäherung,

$$\frac{de}{dt}(t=\Delta)=55$$

setzen. Dann ergibt sich, wie wir leicht einsehen,

$$d\Delta = -\frac{de}{55} = -0,01818.de.$$

Da die Temperatur der größten Dichtigkeit annäherungsweise durch die Hälfte des Werthes von Δ angezeigt wird, so finden wir für die Aenderung derselben auch nahe die Hälfte von $d\Delta$ also

$$-0,00909.de.$$

Für

$$dq=0,000001$$

ist hiernach

$$d\Delta = -0^\circ,165$$

und die Temperatur für das Maximum der Dichtigkeit ändert sich um

$$-0^\circ,0825.$$

Für

$$dq = -0,00000135$$

ist

$$d\Delta = +0^\circ,223.$$

Die Temperatur für das Maximum der Dichtigkeit des Was-

sers steigt also in der Annahme der ältern Ausdehnungs-
Coëfficienten des Quecksilbers um

$$0^{\circ},11.$$

28. Ein zufälliger Umstand bietet uns die Gelegenheit die vorstehenden Resultate der Rechnung der Prüfung durch die Beobachtung zu unterwerfen. Die zuerst angefertigten Apparate, von der in Fig. 11 Taf. II. dargestellten Form, waren unter Zugrundelegung des von Dulong und Petit gefundenen Ausdehnungs-Coëfficienten

$$q = 0,00018018$$

bestimmt worden. Dahin gehörten die beiden zu Anfang dieses Paragraphen erwähnten, übereinstimmend gehenden Apparate. Für diese ergab sich, unter Beibehaltung der bisherigen Bezeichnung,

Apparat I.

$$g = 0^{\circ},3584$$

$$G = 23,375$$

$$G - x = 19,8917$$

$$x = 3,483$$

und

$$\lambda = 1,274$$

Apparat II.

$$g = 0^{\circ},3166$$

$$G = 20,630$$

$$G - x = 17,5728$$

$$x = 3,057$$

und

$$\lambda = 2,596.$$

Der Apparat II wurde in dieselbe Bütte, in welcher die Apparate A und B eingesenkt waren, durch seitwärts angebrachte Oeffnungen in einer Korkfassung so eingesteckt, daß die Scaln in horizontaler Lage auswendig abgelesen werden konnten. In derselben Lage wurde der Nullpunkt der Scale bestimmt, der sich (der Apparat war etwa sechs Monate alt) im Laufe einer Woche nicht merklich änderte. Der Gang dieses Apparats (sowie zweier

andern III und IV., die gleichmäÙig eingesteckt waren) sollte, zum Behuf späterer Bestimmungen, mit dem Gange der Apparate *A* und *B* verglichen werden und darum waren sämtliche Apparate gleichzeitig beobachtet worden. Die vollständigen Versuchsreihen hier mitzuthellen, hätte keine Bedeutung; ich entnehme, für unsern Zweck, nachstehend nur einige Bestimmungen.

<i>t.</i>	Apparat <i>A.</i>	Apparat II.		Fehler.
	<i>e.</i>	<i>e</i> berechnet.	<i>e</i> beobachtet.	
Größte Dichtigkeit	— 115,5	— 121,6	— 121	+ 0,6
7°,69	0	+ 12,14	+ 13	+ 0,6
11°,52	+ 320,5	+ 304	300	— 4,5

Apparat <i>A.</i>	Apparat II.		Fehler.
Δ .	Δ berechnet.	Δ beobachtet.	
7°,69	7°,912	7°,96	+ 0°,037

Die Fehler sind sämtlich als verschwindend klein zu betrachten, indem wir berücksichtigen, daß am Apparat II die Milliontel des Volumens des Wassers bei 0° nur geschätzt werden konnten.

29. Die letzten Erörterungen erklären großentheils die bedeutenden Abweichungen in der Bestimmung der Ausdehnung des Wassers aus Fehlern, die in dem angenommenen Ausdehnungs-Coëfficienten des Glases gemacht worden sind. Wir finden sogar unzweifelhafte Abweichungen in der Ausdehnung des innern Raumes der aus derselben Glasröhre angefertigten Apparate, woraus folgt, daß wir selbst dann einen, wenn auch kleinen, Fehler begehen, wenn wir die cubische Ausdehnung von Glasbehältern aus der linearen der Röhren, die das Material dazu geliefert haben, ableiten. Unsere Röhren, alle von derselben Glassorte, sind aus derselben Hütte in Thüringen bezogen. Wir haben für den Coëfficienten der scheinbaren Ausdehnung des Quecksilbers in den Glasbehältern verschiedener Apparate, die überall in gleicher Weise und

mit gleicher Genauigkeit bestimmt worden ist, die nachstehenden Werthe gefunden:

0,00015333	(App. I.)
0,00015348	(" II.)
0,00015306	(" III.)
0,00015365	(" IV.)
0,00015356	
0,00015338	
0,0001544	
0,0001541	
0,00015316	} ¹⁾
0,00015304	
0,00015317	(A)
0,00015348	(B)
0,00015260	} ²⁾
0,00051477	
0,00015226	
0,00015224	

Mittel 0,000153355.

Die Abweichungen betragen 0,0000025 und eben so viel betragen die Schwankungen in der cubischen Ausdehnung der von uns angewendeten Glassorte. Wir ersehen hieraus die Nothwendigkeit für jeden Apparat den Ausdehnungs-Coëfficienten *besonders* zu bestimmen. Den obigen Fehlergränzen entsprechen in der Bestimmung der grössten Dichtigkeit und der zugehörigen Temperatur bezüglich 11,35 Theile und 0°,206.

30. Viel gröfser aber sind dieselben Schwankungen für die verschiedenen gewöhnlichen Glassorten. Als durchschnittlichen Ausdehnungs-Coëfficienten für die unserige er-

- 1) Zwei Apparate, um die Ausdehnung von Flüssigkeiten und Gase durch das Auslaufen von Quecksilber zu bestimmen. Beide aus derselben Glasröhre angefertigt.
- 2) Vier Eisapparate (siehe den folgenden Paragraphen); die beiden letztern aus derselben Röhre und fast gleicher Ausdehnung.

halten wir, den Regnault'schen Werth für q als richtig vorausgesetzt,

$$0,00002818.$$

Verglichen mit den von Hrn. Regnault für verschiedene Glassorten bestimmten ¹⁾, giebt er eine verhältnißmäßig starke Ausdehnung. Als Gränzen, zwischen welchen die Ausdehnungs-Coëfficienten schwanken, können wir

$$0,000021 \text{ und } 0,000030$$

annehmen. Wenn wir also, wie es die ältern Experimentatoren thaten, irgend eine sorgfältige Bestimmung der Ausdehnung des Glases auf die gerade angewandte Glasorte ohne Weiteres übertragen, so können wir leicht in der Bestimmung der grössten Dichtigkeit um 40 bis 50 Milliontel und in der Bestimmung von Δ um einen halben Grad fehlen.

31. Die mit dem Apparate *A* gemachten und oben mitgetheilten Bestimmungen schliessen sich, wenn wir die Function zwischen der Ausdehnung e und der Temperatur t in bekannter Weise graphisch darstellen, einem einzigen Curvenzuge — auch bei Anwendung eines grössern Maassstabes — ungezwungen an. In der Fig. 1 Taf. III. sind neben dieser Curve noch zwei andere gezeichnet. Die eine ist die Curve Hällström's, die zweite diejenige, welche den Beobachtungen von Despretz entspricht. Es ist hier meine Absicht nicht, die oben mitgetheilten Beobachtungen zu discutiren. Eben so wenig liegen mir die Original-Arbeiten von Hällström und Despretz vor. Ich knüpfe daher blofs noch die Bemerkung an, dafs durch die Annahme eines Fehlers in dem Ausdehnungs-Coëfficienten des Glases die Curve des Hrn. Despretz, nicht aber die Curve von Hällström, bis auf unbedeutende Unregelmäßigkeiten, mit der unserigen zur Uebereinstimmung gebracht werden kann, und dafs, nahe in der Mitte zwischen unserer Curve und derjenigen von Despretz diejenige hindurchgeht, die unsere erste Apparate geben,

1) *Mémoires de l'Institut* 1847.

welche auf Grund des älteren Ausdehnungs-Coëfficienten für Quecksilber construirt sind.

§. 3.

Bestimmung des Ausdehnungs-Coëfficienten des Wassers beim Gefrieren und des Ausdehnungs-Coëfficienten des Eises.

32. Zu denjenigen Constanten, welche in der allgemeinen Physik eine grössere Bedeutung haben, gehört ohne Zweifel auch der Ausdehnungs-Coëfficient des Wassers im Momente des Festwerdens. Eine mit aller Sorgfalt ausgeführte Bestimmung desselben schien mir daher besonders wünschenswerth. An diese Bestimmung knüpft sich eine zweite, die Bestimmung des Ausdehnungs-Coëfficienten des Eises. Der Apparat (Fig. 14 Taf. II.), welcher zu beiden Zwecken diente, ist, nach gemeinsamer Besprechung, von Hrn. Geißler in folgender Weise ausgeführt worden.

33. Der innere Cylinder *M*, welcher zur Aufnahme des Wassers bestimmt war, war unten offen und etwas verengt; tief in denselben hineinreichend, war am obern Ende ein Haarröhrchen eingeschmolzen, das auch durch den äussern Cylinder *N* hindurchging und den innern *M* trug. Am untern Theile des äussern Cylinders war eine enge Röhre angeschmolzen und dann umgebogen worden. Sie ging bis zum Punkte *o*. Der ganze innere Inhalt wurde mit Quecksilber gefüllt, und dieses zum Austreiben aller Luft längere Zeit gekocht. Nachdem der Apparat dann in Eis gebracht worden, wurde das Gewicht des Quecksilbers bei 0° bestimmt (*G*), und endlich, während er in siedendem Wasser sich befand, das auslaufende Quecksilber (*g*) gewogen. Um den Cylinder *M* mit Wasser zu füllen, wurde die Oeffnung bei *o* geschlossen und an das Haarröhrchen in *c* eine grössere Glaskugel, die oben in eine Röhre ausgezogen war, angeschmolzen. In diese Kugel wurde destillirtes Wasser gebracht, und nachdem dieses in ihr eine halbe Stunde gekocht hatte, wurde die Spitze der ausgezogenen Röhre zugeschmolzen, so daß

über dem Wasser ein luftleerer Raum sich bildete. Hierauf wurden, nach der Erkaltung, gleichzeitig die eben zugeschmolzene Spitze abgebrochen und die Röhre bei o geöffnet. Ein Theil des ausgekochten Wassers drang dann durch das Haarröhrchen bei c in den Cylinder M , während Quecksilber bei o ausfloß. Das Gewicht dieses bei 0° ausfließenden Quecksilbers (W) gab das Volumen des eingedrungenen Wassers. Dieses füllte beinahe den ganzen innern Cylinder, wobei jedoch das freie Ende e des Haarröhrchens immer noch ins Quecksilber hineinreichte. Die Oeffnung bei o wurde wieder abgesperrt und nachdem, durch gelinde Erwärmung, das Wasser aus dem Haarröhrchen durch das nachsteigende Quecksilber verdrängt worden war, wurde die Kugel mit dem noch übrigen Wasser abgeschmolzen und die Oeffnung bei c geschlossen. Endlich wurde die Steigröhre in o angesetzt und die Menge des Quecksilbers im Apparate so regulirt, daß es, wenn das Ganze im Eise genau die Temperatur 0° angenommen hatte, in der Röhre bei o stand, und dieser Stand wurde bezeichnet. Die Steigröhre selbst war aus zwei Theilen zusammengesetzt. Der obere Theil war eine engere Röhre, die sich bei der Calibrirung überall gleich weit erwiesen hatte. Der untere Theil hatte in d eine Erweiterung. Diese, so wie die Weite des obern Theiles, wurden — auf Grund einer vorläufigen Bestimmung vermittelt eines ähnlichen mit einer weitem Steigröhre versehenen Apparates — so bestimmt, daß das Wasser, nachdem es gefroren, bei der Temperatur von 0° das Quecksilber bis in den obern Theil der Röhre, nach k hinaufdrückte und daß die Quecksilbersäule bei einer Erkaltung des Apparates bis -25° noch nicht bis zur Erweiterung bei d heruntersank.

34. Es wurden zuerst zwei Apparate, a und b , in der beschriebenen Weise hergestellt. Der Versuch gelang; nur wurden wir, erst bei Anstellung desselben, darauf aufmerksam, daß bei der Bestimmung der Ausdehnung und Zusammenziehung des Eises ein nicht mehr genau zu cor-

rigirender Fehler dadurch entstehen mußte, daß, statt der einzigen Erweiterung, vier verschiedene Erweiterungen an verschiedenen Stellen der Steigröhre angebracht waren, und die Hälfte derselben der tiefen Temperatur nicht ausgesetzt werden konnte. Es wurden daher noch zwei neue Apparate, *c* und *d*, angefertigt und der bezeichnete Uebelstand vermieden. Die mit diesen vier Apparaten gemachten Bestimmungen finden wir in dem Nachstehenden zusammengestellt.

35. Bei einer Lufttemperatur von 0° wurde in ein leeres Standgefäß auf Watte ein weiterer Glas-Cylinder, und in diesen ein zweiter, welcher Alkohol enthielt, gestellt und zwischen den beiden Cylindern schichtweise gestossenes Eis und Chlorcalcium gebracht. In den auf diese Weise abgekühlten Alkohol wurde der Eisapparat eingesenkt, wobei dem in demselben enthaltenen Wasser von allen Seiten regelmäsig Wärme entzogen wurde und dasselbe unter 0° erkaltete. Der Anfang der Eisbildung kündigte sich durch ein plötzliches Steigen des Quecksilbers an, wobei offenbar eine grössere Menge des Wassers, indem die Temperatur stieg, plötzlich in Eis sich verwandelte¹⁾). Von diesem Momente an schritt die Eisbildung,

- 1) Wasser, das in einen Glasbehälter eingeschlossen ist, gefriert bei sehr verschiedener Temperatur. Als Bedingung, daß diese Temperatur eine sehr niedrige sey, giebt man gewöhnlich die vollkommene Ruhe der Wassertheilchen gegen einander an. Ich meinerseits glaube, daß dieselbe mehr noch in einer gleichmäsigten Erkaltung der ganzen Wassermasse zu suchen sey, und darin, daß die innere Wandung keine, die Eisbildung befördernde, leichter erkaltende Erhabenheiten darbiete. Während das Wasser im Apparate *B* bei $-3^{\circ},60$ gefror (16.), blieb es im Apparate *A*, wo die Erkaltung offenbar viel regelmäsigter vor sich ging, bei einer tiefern Temperatur noch flüssig. Am Apparate II. (Fig. 12) wurde die Erkaltung des Wassers bis unter -8° beobachtet, wobei der Cylinder desselben in Alkohol eingetaucht und dieser der freien Winterkälte ausgesetzt war; der Apparat wurde fortwährend bewegt und hierbei auch, durch die Bewegung eines Quecksilberkügelchen, das am Boden sich befand, die Wassertheilchen gegen einander verrückt. Der Apparat gefror hierbei nicht. Eben so wenig gefror das Wasser in einem ähnlichen Apparate, bei einer gleichen, durch Schwefeläther

angezeigt durch das fortwährende Steigen des Quecksilbers, regelmässig fort, der Menge der dem noch übrigen Wasser entzogenen Wärme entsprechend. Das Zerplatzen des innern Cylinders erfolgte erst später, nachdem etwa neun Zehntel des Wassers gefroren waren. Dasselbe kündigte sich dadurch an, dass man durch das Quecksilber hindurch einen hellen Klang hörte und zugleich die Quecksilbersäule in Folge eines Stosses ansteigen sah ¹⁾. Dieser Klang und das gleichzeitige ruckweise Ansteigen wiederholte sich fortwährend, aber schwächer, fast so lange als das Gefrieren fort dauerte. Der innere, dünne Glasylinder erhielt offenbar immer neue Sprünge. Nachdem die Quecksilbersäule zuletzt sehr unregelmässige Schwankungen gemacht, wurde der Stand ein fester, und blieb, indem der Alkohol in steter Bewegung erhalten wurde, einige Zeit hindurch ein solcher. Die Temperatur wurde durch ein gleichzeitig mit dem Eisapparate in den Alkohol gesenktes Thermometer bestimmt, wobei kleine Fehler allerdings nicht vermieden werden konnten.

36. Der Stand des Quecksilbers in dem ersten Eisapparate wurde beobachtet, nachdem die Temperatur des Alkohols ein Minimum geworden war. Dann wurde der zweite Apparat eingesenkt, während der erste in Schnee

hervorgebrachten Erkältung des Cylinders, wobei das Wasser sich um 1300 Milliontel ausdehnte. Als aber in demselben Apparat der innere Cylinder abgebrochen und herabgefallen und das Quecksilber theilweise in den äussern Cylinder ausgeschüttet war, gefror das Wasser und zwar in sehr constanter Weise bei einer Temperatur von etwa -4° , angezeigt durch eine Ausdehnung von 400 Milliontel. Endlich zersprang ein Apparat, der in eine Kältemischung eingetaucht wurde, als bei einer Ausdehnung von nahe 1800 Milliontel (bei etwa -12°) die Eisbildung eintrat. Die Gefahr des Zerspringens ist offenbar um so grösser, je schwieriger Wasser entweichen kann, und je tiefer das Wasser vor dem Gefrieren erkaltet war.

- 1) Bei dem Apparat (d) war die Gewalt dieses Stosses so gross, dass Quecksilber aus der Erweiterung bei d in den obern Theil der längern Röhre hineindrang und durch den Druck der dadurch abgesperrten Luft herausgeschleudert wurde.

gestellt wurde, wo dann die Quecksilbersäule bis zu einem constanten Punkte k anstieg, der wie der frühere Stand bezeichnet wurde. (Es wurde hierzu wohl eine halbe Stunde erfordert, was auf die schlechte Leitungsfähigkeit des Eises hindeutet. Bei den kleinen Abweichungen in solchen Beobachtungen ist der höhere Stand der richtigere. Nachdem der Apparat zuletzt mehrere Stunden in Eis gestanden, sank das Quecksilber merklich unter den höchsten Stand herab: einen Anfang des Aufthauens anzeigend.) Ebenso wurde der zweite Apparat behandelt, und dann wurden beide Apparate, ohne dafs in der Zwischenzeit ein Aufthauen stattfand, mehrmals von Neuem eingesenkt und bei weniger niedriger Temperatur beobachtet.

Endlich liefs man die beiden Apparate aufthauen und brachte sie in schmelzenden Schnee, wo dann genau der frühere Nullpunkt sich wiederfand.

Dasselbe Verfahren wurde später mit den beiden Apparaten (c) und (d) wiederholt. Bei dem letztern fand sich zuletzt der Nullpunkt tiefer als vorher.

Schliesslich wurden die Steigröhren unter o abgeschnitten, und die verschiedenen Inhalts-Bestimmungen vermittelt Quecksilber vorgenommen.

37. In den nachfolgenden Zusammenstellungen bedeutet G das ganze innere Volumen, W das Volumen des Wassers und Q das Volumen des Quecksilbers. Alle Volumina sind bei 0° genommen und durch das Gewicht des sie ausfüllenden Quecksilbers ausgedrückt. g bedeutet die Menge desjenigen Quecksilbers, welche bei einer Erwärmung von 0° bis 100° aus dem ganz mit Quecksilber angefüllten Apparate ausfliesst, w die Ausdehnung des Wassers von 0° nach dem Gefrieren zu Eis von 0° , t die Temperatur, welche das Eis bei den verschiedenen Bestimmungen unter 0° annimmt, l die Anzahl der Scalentheile, um welche die Quecksilbersäule bei dieser Erkaltung unter dem höchsten Stande heruntersinkt. Diese Anzahl entspricht einem Quecksilbergewichte k , das sich aus der Calibrirung

des obern Theiles der Röhren ergibt. Die angewandte Scale ist eine willkürliche, 342 ihrer Theile finden sich gleich 100^{mm}.

Aus diesen Daten berechnet sich der Ausdehnungs-Coëfficient des Wassers beim Gefrieren $f = \frac{w}{W}$, der Coëfficient der scheinbaren Ausdehnung des Quecksilbers $p = \frac{g}{G}$ und der der kubischen Ausdehnung des Glases $r = q - p$; ferner die wirkliche Ausdehnung oder Zusammenziehung des Eises für eine Erwärmung oder Erkaltung von einem Grade

$$\lambda = \frac{k}{t} - Qq + Gr$$

und endlich der Ausdehnungs-Coëfficient des Eises

$$e = \frac{\lambda}{W + w}.$$

Hierbei ist vorausgesetzt, daß die ganze Quecksilbermasse der beobachteten Temperatur ausgesetzt bleibe. Nimmt das über den Nullpunkt vor dem Gefrieren später tretende Quecksilber die constante Temperatur von 0° der Umgebung an, so muß Q durch $Q' = Q - w$ ersetzt werden, wonach λ und e ihren Werh in λ' und e' ändern.

38. Apparat (a).

433 Scalentheile der obern Röhre wiegen 0^{sr},3620

$$G = 102^{\text{sr}},724$$

$$W = 51,500$$

$$Q = 51,224$$

$$g = 1,590$$

$$w = 4,733.$$

$$t = -24^{\circ},1$$

$$e = 433$$

$$k = 0^{\text{sr}},3620$$

$$-16,1$$

$$280$$

$$0,2340$$

$$-12,6$$

$$225$$

$$0,1881$$

$$-9,1$$

$$159,5$$

$$0,13335$$

$$-7,0$$

$$125$$

$$0,1045.$$

Hieraus ergibt sich

$$p = 0,00015477$$

$$r = 0,00002676$$

$$\frac{k}{t} = 0,01502$$

$$= 0,01453$$

$$= 0,01493$$

$$= 0,01465$$

$$= 0,01493$$

$$\text{Mittel } \frac{k}{t} = 0,01481$$

$$Gr = 0,00274$$

$$Qq = 0,00929$$

$$Q'q = 0,00844$$

$$\lambda = 0,00825$$

$$\lambda' = 0,00911$$

$$e = 0,000147$$

$$e' = 0,000162$$

$$\text{Mittel} = 0,0001545.$$

Endlich ist

$$f = 0,09192.$$

39. Apparat (b).

499 Scalentheile wiegen 0^{gr},1947.

$$G = 71^{\text{gr}},52$$

$$W = 40 ,27$$

$$Q = 31 ,25$$

$$g = 1 ,0914$$

$$w = 3 ,7037$$

$$t = -19^{\circ},4 \quad l = 499 \quad k = 0^{\text{gr}},1947$$

$$-18 ,6 \quad 482 \quad 0 ,18807$$

$$-17 ,7 \quad 462 \quad 0 ,18026$$

$$-12 ,6 \quad 318 \quad 0 ,12407$$

$$-7 ,1 \quad 175 \quad 0 ,06828.$$

Hieraus ergibt sich

$$p = 0,00015260$$

$$r = 0,00002893.$$

$$\frac{k}{t} = 0^{\text{sr}},01004$$

$$= 0,01011$$

$$= 0,01018$$

$$= 0,00984$$

$$= 0,00962$$

$$\text{Mittel } \frac{k}{t} = 0,00996$$

$$Gr = 0,00207$$

$$Qq = 0,00567$$

$$Q'q = 0,00500$$

$$\lambda = 0,00636$$

$$\lambda' = 0,00703$$

$$e = 0,000145$$

$$e' = 0,000161$$

$$\text{Mittel} = 0,000153.$$

Endlich ist

$$f = 0,09197.$$

40. Apparat (c).

877 Scalentheile wiegen $0^{\text{sr}},2660$

$$G = 75^{\text{sr}},700$$

$$W = 51,8155$$

$$Q = 23,8845$$

$$g = 1,1526$$

$$w = 4,7903$$

$$t = -20^{\circ},1 \quad l = 647 \quad \dots\dots\dots 1)$$

$$-14,1 \quad 489 \quad k = 0,14820$$

$$-11,5 \quad 399 \quad 0,12102$$

$$-8,7 \quad 305 \quad 0,09251$$

$$-7,1 \quad 254 \quad 0,07704.$$

Hieraus ergibt sich

$$p = 0,00015226$$

$$r = 0,00002927$$

- 1) Diese Beobachtung ist besser nicht zu berücksichtigen, weil sie während bedeutender Schwankungen gemacht und als ungewiß bezeichnet wurde. Die beobachtete Temperatur ist jedenfalls zu tief.

$$\begin{aligned}
 \frac{k}{t} &= 0^{\text{sr}},01051 \\
 &= 0,01052 \\
 &= 0,01063 \\
 &= 0,01085 \\
 \hline
 \text{Mittel } \frac{k}{t} &= 0,01063 \\
 Gr &= 0,002216 \\
 Qq &= 0,004342 \\
 \hline
 \lambda &= 0,008504 \\
 e &= 0,000156 \\
 \text{Endlich ist} \quad f &= 0,09245
 \end{aligned}$$

41. Apparat (d).

485 Scalentheile wiegen $0^{\text{sr}},2136$

$$G = 68^{\text{sr}},490, \text{ später } 68^{\text{sr}},460$$

$$W = 47,826$$

$$Q = 20,635.$$

Der Werth von Q ist bei den bisherigen Apparaten als die Differenz von G und W bestimmt worden und diese Bestimmung, was nur bei dem Apparate (c) nicht möglich war, dadurch controlirt, dafs, nach der Anstellung der Versuche, das in dem Apparate befindliche Quecksilber herausgenommen und direct gewogen wurde. Beim Apparate (d) konnte nur diese letzte Bestimmung gelten. Es fand sich, dafs der Nullpunkt, nachdem das Eis wieder geschmolzen war, sich gesenkt hatte. Durch Calibrirung der an dem frühern Stande fehlenden Strecke ergab sich, dafs

$$0^{\text{sr}},030$$

dasjenige Quecksilber wog, welches, der Beobachtung zufolge, herausgesprungen war. Hiernach geht die Uebereinstimmung in den verschiedenen Abwägungen bis auf $0^{\text{sr}},001$.

$$g = 1^{\text{sr}},0427$$

$$w = 4,4005$$

$$t = -18^{\circ},4$$

$$l = 443$$

$$k = 0,19510$$

$$-17,1$$

$$412$$

$$0,18144$$

$$-7,9$$

$$160$$

$$\dots\dots$$

Die ganze Sorgfalt und längere Zeit war auf die beiden ersten Beobachtungen verwandt worden; die dritte lassen wir ganz fallen, weil sie wahrscheinlich einen Ablesungsfehler in den ganzen Graden enthält.

Hieraus ergibt sich

$$p = 0,00015224$$

$$r = 0,00002929$$

$$\frac{k}{t} = 0^{\text{sr}},010603$$

$$= 0,010611$$

$$\text{Mittel } \frac{k}{t} = 0,010607$$

$$Gr = 0,002006$$

$$Qq = 0,003746$$

$$\lambda = 0,008867$$

$$e = 0,000170.$$

Endlich ist

$$f = 0,09195.$$

42. Die verschiedenen Werthe für $\frac{k}{t}$, welche wir für verschiedene Temperaturen mit jedem der Apparate erhalten haben, weichen zwar merklich, aber immerhin doch nur wenig von einander ab, und diese Abweichungen vertheilen sich so, dafs wir sie Beobachtungsfehlern in den Temperatur-Bestimmungen zuschreiben können und müssen, wonach wir zu dem Schlusse berechtigt sind, dafs, sobald einmal das Wasser in Eis übergegangen ist, dieses sich regelmäfsig zusammenzieht und wieder ausdehnt.

43. Um constante Beobachtungsfehler zu vermeiden, haben wir, so viel als möglich, dafür Sorge getragen, dafs, bevor eine Beobachtung gemacht wurde, die Temperatur um die beobachtete hin und her schwankte. Berechnen wir die Beobachtungsfehler in den Temperaturen für die einzelnen Bestimmungen, nach dem mittleren Werthe von $\frac{k}{t}$, so finden wir die folgende Zusammenstellung

Apparat (a).

Temperatur = $-24^{\circ},1$	Fehler = $+0^{\circ},34$
— $16,1$	— $0,30$
— $12,6$	+ $0,10$
— $9,1$	— $0,10$
— $7,0$	+ $0,6.$

Apparat (b).

Temperatur = $-19^{\circ},4$	Fehler = $+0^{\circ},16$
— $18,6$	+ $0,28$
— $17,7$	+ $0,38$
— $12,6$	— $0,11$
— $7,1$	— $0,24.$

Apparat (c).

Temperatur = $-14^{\circ},1$	Fehler = $-0^{\circ},15$
— $11,5$	— $0,12$
— $8,7$	0
— $7,1$	+ $0,15.$

Die beiden einzigen Beobachtungen am Apparate (d) stimmen überein.

44. Für die größten Abweichungen in dem Werthe von $\frac{k}{t}$, die sich auf λ und λ' unmittelbar übertragen, ergibt sich, daß $\frac{1}{2}(e+e')$ für den Apparat (a) zwischen

0,000149 und 0,000158

für den Apparat (b) zwischen

0,000145 und 0,000156

schwankt, so wie endlich der Werth von e für den Apparat (c) zwischen

0,000154 und 0,000160.

Es ist nicht unwahrscheinlich, daß bei den beiden einzigen Beobachtungen mit dem Apparate (d) ein constanter Fehler sich eingeschlichen habe. Diese Vermuthung wird dadurch noch unterstützt, daß fast mit Gewissheit anzunehmen ist, daß bei der verworfenen Beobachtung $7^{\circ},9$

statt $6^{\circ},9$ abgelesen wurde. Dann würde für diese Beobachtung λ um 0,00040 gröfser, und dem entsprechend fände man $e = 0,000162$.

45. Wenn wir die gefundenen Mittelwerthe von e zusammenstellen, so kommt:

0,000155

0,000153

0,000156

0,000170

und wenn wir hieraus wiederum das Mittel nehmen, finden wir für den *Coëfficienten der kubischen Ausdehnung des Eises*, indem wir das Volumen desselben bei 0° zu Grunde legen:

$$e = 0,0001585 \quad (1).$$

Hiermit stimmt endlich auch derjenige Werth

0,000157

den wir aus dem vorläufigen Versuche bei -20° und unter Vermeidung der bei den Apparaten (a) und (b) erwähnten Uebelstände, mit aller Sorgfalt, aber unter Anwendung einer weitem Steigröhre, abgeleitet haben.

Die Uebereinstimmung ist so grofs, als sie, bei der Unsicherheit in der Bestimmung der tiefen Temperaturen, so wie bei den ungewissen Angaben über die Leitungsfähigkeit des Eises, sich erwarten liefs. Nur unter günstigen Umständen, namentlich bei einer bedeutenden Winterkälte, ist eine gröfsere Genauigkeit erreichbar. Dann konnte man den Apparat, im gefrorenen Zustande, Tage lang wie ein Thermometer beobachten und jedesmal dabei die Temperatur so lange Zeit constant erhalten, dafs die Langsamkeit, mit welcher das Eis die umgebende Temperatur annimmt, nicht mehr störend einwirkt.

46. Die durch die Gleichung (1) bestimmte Ausdehnung des Eises ist gröfser als die Ausdehnung der übrigen, genauer untersuchten festen Körper, 6Mal gröfser als die Ausdehnung des Platins, $1\frac{3}{4}$ Mal gröfser als die Ausdehnung des Zinks, $5\frac{9}{14}$ Mal gröfser als die Ausdehnung unseres Glases ¹⁾.

1) Vergl. Brunner, Ann. Bd. 64, S. 113.

Sie übertrifft noch die scheinbare Ausdehnung des Quecksilbers in Glasgefäßen und *stimmt mit der Ausdehnung des Wassers überein, wenn dieses eine Temperatur zwischen -4° und -5° , oder eine Temperatur von etwa $+13^{\circ}$ hat.*

Die frühere Bestimmung der Ausdehnung des Eises, die von Placidus Heinrich herrührt und aus den Schriften der Münchener Akademie in die Lehrbücher übergegangen ist, giebt

$$e=0,00073536.$$

Hiernach wäre die Ausdehnung des Eises $4\frac{2}{3}$ Mal größer als die unserige, also 26 Mal größer als die Ausdehnung des Platins und käme beinahe der Ausdehnung des Weingeistes gleich.

47. Die verschiedenen Werthe, welche wir für den Ausdehnungs-Coëfficienten des Wassers, wenn es zu Eis von 0° gefriert, erhalten haben, sind die folgenden:

$$0,09192$$

$$0,09197$$

$$0,09245$$

$$0,09195.$$

Wenn wir von der dritten Bestimmung absehen, so beträgt die größte Abweichung von dem Mittelwerthe

$$f=0,09195$$

nicht $\frac{1}{10000}$. Zur Ausschließung dieser Bestimmung, bei welcher die wiederholte Calibrirung der Steigröhre genau denselben Inhalt als früher gab, liegt kein anderer Grund vor, als dafs wir nicht im Stande waren, die frühere Inhalts-Bestimmung des Cylinders, — der bei einem nachträglichen Gefrier-Versuche zerplatzte —, sowie den frühern Nullpunkt zu controliren.

Wir haben versäumt, wozu uns die Versuche allerdings die Gelegenheit boten, annäherungsweise die Zusammenrückbarkeit des Eises zu bestimmen. Wenn diese derjenigen des Wassers gleich ist, so würde die desfallsige Correction des gefundenen Ausdehnungs-Coëfficienten innerhalb der Beobachtungsfehler fallen und blofs die letzte

Decimale um etwa eine Einheit vermehren. Unsere Bestimmungsweise garantirt hiernach, wenn wir uns gegen Ableungsfehler durch eine wiederholte Bestimmung schützen, die Genauigkeit der Resultate bis auf die genannte Decimale.

48. Das Eis hat also immer genau dieselbe Dichtigkeit, wenigstens dann, wenn es unter denselben Verhältnissen gefroren ist. Dafür, daß dieses geschähe, haben wir bei unsern Versuchen Sorge getragen. Der Cylinder, welcher das Wasser enthielt, war ganz von Quecksilber umgeben, und die Temperatur des Wassers sank namhaft unter 0° bevor es zu gefrieren anfang. Bei einer ähnlichen Erstarrung schiefen Nadeln, von dem Umfange ausgehend durch die ganze Wassermasse an und von diesen geht die weitere Eisbildung fort. Es konnte diese bei den Versuchen selbst nicht beobachtet werden. Das Eis wurde erst beim Aufthauen sichtbar, federwolkenartig aussehend, nicht wasserhell, aber doch so durchsichtig, daß man das Haarröhrchen in seiner Mitte ganz deutlich sehen konnte. Das aus dem zerplatzten Apparate (c) genommene Eis zeigte sich ganz homogen und consistent.

49. Beim Aufthauen des Eises traten zuletzt, wenn nur noch wenig Eis an dem Haarröhrchen haftete, kleine, nur einem guten Auge sichtbare, Bläschen auf, die gleich nachher wieder verschwanden. Offenbar bestätigte sich hierin die bekannte Beobachtung, daß beim Gefrieren auch die letzte Spur von Luft, die vom Wasser absorbirt ist, sich ausscheidet: Luft, die bei unseren Versuchen augenblicklich wieder vom Wasser verschluckt wurde. Aller Sorgfalt ungeachtet, war also noch Luft in unserm Wasser geblieben, freilich in so verschwindender Menge, daß wohl schwerlich unsere Bestimmungen irgendwie davon afficirt werden. Nur im Apparate (c) konnten solche Luftbläschen nicht wahrgenommen werden.

50. Die Fig. 2 Taf. III. veranschaulicht die relative Größe der Ausdehnung des Wassers in Folge der Erstarrung, und der Ausdehnung des Wassers und des Eises durch die Wärme.

Ob Eis, wenn es einerseits sehr langsam und regelmäßig oder andererseits bei freiem Luftzutritt krystallisirt, eine andere Ausdehnung erhalte, sind Fragen, welche außerhalb der Gränzen dieser Arbeit liegen.

Bonn, den 5. April 1852.

(Wird fortgesetzt.)

IV. *Ueber den Einfluss des Wassers bei chemischen Zersetzungen; von Heinrich Rose.*

(Fortsetzung von S. 117.)

Aus den angeführten Versuchen ergiebt sich, daß auch aus den kohlensauern Salzen, deren Basen zu den allerstärksten gehören, das Wasser Kohlensäure austreiben kann. Unter gewissen Verhältnissen kauft sogar schon bei gewöhnlicher Temperatur das Wasser gegen diese Basen eine stärkere Verwandtschaft als die Kohlensäure.

Es ist bekannt, daß die wasserfreien alkalischen Erden, wenn sie einer nicht zu hohen Temperatur ausgesetzt gewesen sind, mit großer Begierde Wasser aufnehmen, und sich unter sehr starker Wärmeentwicklung in Hydrate verwandeln.

Aber die trocknen alkalischen Erden absorbiren bei der gewöhnlichen Temperatur keine Kohlensäure, wenn diese von aller Feuchtigkeit vollständig befreit worden war. Ich habe frisch gebrannte Kalkerde in getrocknetem Kohlensäuregas sehr lange über Quecksilber stehen lassen. Es wurden nur sehr wenige Cubikcentimeter des Gases davon absorbirt, und dies gleich anfangs, was unstreitig von der Gegenwart einer geringen Menge von Feuchtigkeit herrührte, aber in 4 Wochen darauf wurde das Volumen des Gases gar nicht verändert. So wie ich aber Wasser zu der Kalkerde treten ließ, wurde das Kohlensäuregas

vollständig von derselben absorbirt, und das Quecksilber erfüllte den Raum des großen Cylinders vollständig.

Eben so wie trockne Kalkerde verhält sich trockne Baryterde gegen trocknes Kohlensäuregas. Innerhalb vier Wochen zeigte sich keine Absorption des Gases, aber diese erfolgte nach kurzer Zeit als Wasser zu der Baryterde gebracht wurde.

Bei erhöhter Temperatur verbindet sich indessen trockne Kalkerde und trockne Baryterde mit trockenem Kohlensäuregas. Leitet man das Gas über die in einer Glasröhre befindlichen Erden, so braucht man diese nur wenig, weit unter der Rothgluth zu erhitzen, wenn sie die Kohlensäure aufnehmen sollen. Die Absorption geschieht jedoch etwas langsam, und selbst durch langes Erhitzen und langes Darüberleiten des Gases konnten die Erden nicht ganz vollständig mit Kohlensäure gesättigt werden. Die Baryterde nahm die Kohlensäure in etwas größerer Menge auf als die Kalkerde, vielleicht weil diese minder stark erhitzt werden durfte, als jene.

Es ist bemerkenswerth, wie verschieden Kohlensäure und Wasser gegen Alkalien, gegen Baryterde und gegen Kalkerde unter verschiedenen Umständen sich verhalten. Bei gewöhnlicher Temperatur nehmen beide alkalische Erden mit großer Begierde Wasser auf, aber absorbiren keine Kohlensäure, mit welcher sie sich erst bei erhöhter Temperatur verbinden. Wenn sie sich aber mit Kohlensäure und mit Wasser verbunden haben, so werden beide schwache Säuren mit großer Verwandtschaft festgehalten. Wie wir weiter unten sehen werden, kann Kohlensäure das Wasser aus den Hydraten der Alkalien und der alkalischen Erden austreiben, andrerseits aber treibt bei sehr erhöhter Temperatur das Wasser die Kohlensäure nicht nur aus der kohlensauren Kalkerde, sondern auch aus der kohlensauren Baryterde und den kohlensauren Alkalien aus, aber bei gewöhnlicher Temperatur und auch bei der Kochhitze vermag das Wasser nicht die beiden kohlensauren Erden zu zerlegen, auch nicht einmal einen kleinen

Theil der Kohlensäure auszutreiben, selbst wenn es in bedeutenden Mengen angewandt wird, denn wenn die Auflösungen der neutralen Salze der beiden Erden, auch wenn sie sehr verdünnt sind und kochend angewandt werden, durch Auflösungen neutraler kohlensaurer Alkalien zerlegt werden, so erhält man neutrale kohlensaure Baryterde und Kalkerde.

Solche Widersprüche finden sehr häufig statt, wenn schwache Verwandtschaften thätig sind; und wir treffen sie weit weniger bei Zersetzungen an, die in Folge starker Verwandtschaften entstehen. Denn in diesem Falle werden die Nebeneinflüsse leicht mehr oder weniger vollständig überwunden; sie äußern aber ihre Wirkungen, wenn Körper von schwacher Verwandtschaft mit einander in Berührung kommen und sich gegenseitig zersetzen. Diese Nebeneinflüsse können gewöhnlich schwer bestimmt werden, und lassen sich oft so wenig beurtheilen, daß man die Resultate einer solchen Zersetzung schwer voraussagen kann, und diese können oft verschieden ausfallen, wenn man auch meint, dieselbe Operationsmethode eingeschlagen zu haben.

Bei jenem Einwirken des Wassers und der Kohlensäure auf Baryterde und Kalkerde ist namentlich ein Moment noch hervorzuheben, welches das Resultat der Prozesse mit bedingen kann. Es ist die Verwandtschaft des Carbonats zum Hydrate, worauf ich im Anfange dieser Abhandlung und bei mehreren anderen Gelegenheiten aufmerksam gemacht habe. Diese Verwandtschaft ist die Ursach, daß reine Baryterde und Kalkerde nur bei Gegenwart von Wasser Kohlensäure anziehen; und eine Verbindung von Kalkerdehydrat mit kohlensaurer Kalkerde verwandelt sich bei der gewöhnlichen Temperatur nicht vollständig in neutrale kohlensaure Kalkerde. Fuchs ¹⁾ fand, daß gebrannte Kalkerde, welche drei Jahre hindurch der Luft, also der vereinten Wirkung der Kohlensäure und des Wassers ausgesetzt worden war, noch Kalkhy-

1) Pogg. Ann. Bd. 27, S. 603.

drat enthielt. Wird nach seinen Versuchen gebrannte Kalkerde 3 Monate hindurch der Luft ausgesetzt, so hört nach dieser Zeit die Gewichtsvermehrung, die in den ersten Tagen sehr merklich, dann immer langsamer von staten geht, ganz auf und es bildet sich eine Verbindung aus gleichen Atomen kohlensaurer Kalkerde und Kalkhydrat ($\text{Ca}\ddot{\text{C}} + \text{Ca}\ddot{\text{H}}$) bestehend.

Diese Erfahrungen stimmen mit denen von John und von d'Arcet überein, welche fanden, dafs die Kalkerde im gewöhnlichen Luftmörtel, selbst wenn er sehr alt geworden ist, nie vollständig mit Kohlensäure gesättigt sey. Nur wenn der Mörtel Jahrhunderte oder Jahrtausende alt geworden ist, wie in den Bauten der alten Römer, scheint die Kalkerde sich ziemlich vollständig mit Kohlensäure gesättigt zu haben ¹⁾. Auch in der Natur kommt die kohlensaure Kalkerde, in so grofsen Massen sie sich auch findet, nicht mit Kalkerdehydrat verbunden vor.

Die Verwandtschaft der Baryterde und der Kalkerde zum Wasser ist bedeutend verschieden, je nachdem jene Basen einer gröfseren oder geringeren Hitze ausgesetzt gewesen sind. Wenn man reine kohlensaure Kalkerde bei zu starker Hitze gebrannt hat, so verbindet sie sich weit langsamer mit Wasser, und erwärmt sich weit später durch dasselbe, als wenn sie einer minder starken Hitze ausgesetzt gewesen ist. Die gröfste und plötzlichste Hitze erzeugt sich durch Kalkerde mit Wasser, wenn dieselbe aus der kohlensauen Kalkerde durch ein so schwaches Erhitzen erhalten worden ist, dafs sie noch bedeutende Mengen von Kohlensäure enthält. Ich habe durch eigene Erfahrungen wenigstens nicht die Aussage eines berühmten Chemikers bestätigen können, dafs, wenn kohlensaurer Kalk in mäfsiger Rothglühhitze gebrannt wird, und er ungefähr nur die Hälfte der Kohlensäure verloren hat, er sich mit Wasser nicht löscht, sondern damit erhärtet und eine Verbindung von Carbonat und Hydrat bildet ²⁾.

1) *Ann. de Chimie* Bd 74, S. 313.

2) *Pogg. Ann.* Bd. 27, S. 604.

Andererseits bin ich auch der Ansicht, daß der sogenannte todtgebrannte Kalk die Eigenschaft, sich nicht unter Erhitzung mit Wasser zu verbinden, wenigstens zum Theil fremden Bestandtheilen verdankt.

Baryterde, wenn sie durch Zersetzung von salpetersaurer Baryterde mittelst einer zu starken Hitze erzeugt worden ist, verbindet sich sehr langsam mit Wasser, während sie, wenn sie durch geringere Hitze aus demselben Salze erzeugt worden ist, bei Behandlung mit Wasser augenblicklich eine sehr bedeutende Wärme entwickelt, durch welche das überschüssige Wasser sogleich in Dampf verwandelt wird.

Durch die höhere Temperatur werden die Erden in einen dichtern Zustand versetzt und sintern mehr zusammen, weshalb sie dann der Einwirkung des Wassers mehr widerstehen. Ein noch auffallenderes Beispiel als die beiden alkalischen Erden bietet, wie ich vor einiger Zeit gezeigt habe ¹⁾, in dieser Hinsicht die Magnesia dar. Wenn diese durch die gelindeste Glühhitze aus dem kohlensauren Magnesiahydrat bereitet wird, so erwärmt sie sich nicht im Mindesten mit Wasser; wird sie aber aus der wasserhaltigen neutralen kohlensauren Magnesia durch eine lange dauernde Erhitzung bei nur 300° C. erhalten, so erwärmt sie sich, in Berührung mit Wasser gebracht, sehr stark. Andererseits erhält die Magnesia, wenn sie der heftigsten Hitze des Porcellanofens ausgesetzt gewesen ist, eine solche Dichtigkeit, daß sie unlöslich in Säuren zu seyn scheint; nur nach langer Behandlung mit denselben wird sie aufgelöst; zur vollständigen Auflösung gehört indessen sehr lange Zeit ²⁾.

Das Verhalten der Hydrate des Kalis und Natrons gegen trocknes Kohlensäuregas zeigt einige Eigenthümlichkeiten, und beide Hydrate verhalten sich in dieser Hinsicht wesentlich verschieden.

Es ist bekannt, daß beide Hydrate nur dann schnell

1) Pogg. Ann. Bd. 83, S. 450.

2) Pogg. Ann. Bd. 74, S. 438.

und leicht bei gewöhnlicher Temperatur das Kohlensäuregas absorbiren, wenn man sie befeuchtet, oder wenn man sie in einem Hydrat anwendet, welches mehr Wasser enthält, als die Hydrate im geschmolzenen Zustand.

Dann absorbirt besonders das befeuchtete Kalihydrat das Kohlensäuregas mit Schnelligkeit, und mit Recht benutzt man dasselbe vorzugsweise bei Analysen von Gasarten zu diesem Zwecke.

Auffallend langsamer absorbirt das befeuchtete Natronhydrat die Kohlensäure. Während vom befeuchteten Kalihydrat in einem Cylinder das Kohlensäuregas in wenigen Stunden vollständig absorbirt worden war, gebrauchte eine entsprechende Menge des befeuchteten Natronhydrats mehr als 24 Stunden Zeit, um in einem gleich grossen Cylinder das Kohlensäuregas zu absorbiren.

Frisch geschmolzenes Kalihydrat absorbirt ganz trocknes Kohlensäuregas gar nicht. Unmittelbar nachdem dasselbe in das Gas gebracht worden, stieg das sperrende Quecksilber um 1 bis 2 Kubikcentimeter, wohl nur weil eine Spur von Feuchtigkeit zugegen war, dann aber 5 Wochen hindurch nicht im Mindesten.

Natronhydrat im frisch geschmolzenen Zustande hingegen scheint anfänglich das getrocknete Kohlensäuregas ebenfalls gar nicht zu absorbiren, aber nach und nach stieg das sperrende Quecksilber, zwar äusserst langsam aber nach mehreren Tagen war die ganze Menge des Kohlensäuregases von dem Alkali absorbirt worden.

Dieser Versuch, der mit demselben Erfolge wiederholt wurde, mufste die Vermuthung erregen, dafs das frisch geschmolzene Natronhydrat mehr als ein Atom Wasser enthalte, und dem Kalihydrat (KH) nicht analog zusammengesetzt wäre. Aber eine Analyse des geschmolzenen Natronhydrats, nach der Methode von Schafgotsch vermittelst geschmolzenen Borax ausgeführt, bestätigte diese Vermuthung keinesweges. 2,361 Grm. des Natronhydrats zeigten einen Wassergehalt von 0,531 Grm. oder von

22,50 Proc. Der berechnete Wassergehalt im Natronhydrat ist 22,40 Proc.

Bei der Behandlung des Kalihydrats mit Kohlensäure muß also, wenn letztere absobirt werden soll, noch Wasser hinzugefügt werden, damit sich eine Verbindung von kohlensaurem Kali mit einem Kalihydrat bilden kann, das mehr Wasser, als das geschmolzene enthält, oder vielleicht damit ein wasserhaltiges kohlensaures Kali sich mit Kalihydrat verbinden kann.

Wenn indessen geschmolzenes Kalihydrat bei erhöhter Temperatur mit Kohlensäuregas behandelt wird, so verwandelt es sich leicht unter Abscheidung von Wasser in kohlensaures Kali. Das frisch geschmolzene Kalihydrat wurde in einem Schiffchen von Silber in einer Glasröhre erhitzt, während ein Strom von gut getrocknetem Kohlensäuregas darüber geleitet wurde. Schon beim schwachen Erhitzen fand die Verwandlung statt, aber die ganze Menge des Hydrats konnte nicht in Carbonat verwandelt werden, weil das unter dem gebildeten Carbonat noch liegende Hydrat durch dieses gegen die Einwirkung der Kohlensäure geschützt wurde. 1,503 Grm. des Kalihydrats vermehrten sich durch schwaches Erhitzen in einer Atmosphäre von Kohlensäuregas nur um 0,188 Grm., welche Gewichtsvermehrung durch ein stärkeres Erhitzen, das bis zur Rothgluth gesteigert wurde, nicht zunahm. Wäre die vollständige Verwandlung des Carbonats in Hydrat erfolgt, so hätte die Gewichtszunahme 0,366 Grm. betragen müssen.

Aehnlich dem Kalihydrat verhält sich das geschmolzene Natronhydrat gegen Kohlensäuregas bei erhöhter Temperatur. Durch schwaches und darauf stärkeres Erhitzen nahm es lange nicht die zur Bildung von kohlensaurem Natron nöthige Menge von Kohlensäure auf.

Dafs aber in diesen Fällen keine chemischen Verbindungen von Hydrat mit Carbonat erzeugt wurden, welche mit einer gewissen Hartnäckigkeit der Einwirkung der Kohlensäure bei erhöhter Temperatur widerstehen, sondern dafs nur das gebildete geschmolzene Carbonat das noch

ünzersetzte geschmolzene Hydrat gegen die fernere Einwirkung der Kohlensäure geschützt hat, ergab sich einfach daraus, dafs, als das erhaltene Product zu wiederholten Malen mit kaltem Wasser behandelt wurde, zuerst die Auflösungen mit Silberoxydlösung einen rein weissen Niederschlag hervorbrachten; zuletzt aber erzeugten sich Lösungen, in welchen braune Fällungen sich bildeten, selbst auch wenn ein Ueberschufs der Silberoxydlösung hinzugefügt wurde.

Da wir das gegenseitige Verhalten der Kohlensäure und des Wassers, wegen der schwachen Verwandtschaft, welche sie gegen andere Substanzen äufsern, in sehr vielen Fällen nicht genügend zu erklären vermögen, so müssen wir uns für jetzt begnügen, die Thatsachen zu erwähnen, welche gegenwärtig oft paradox erscheinen mögen, welche aber für künftige Forschungen Material zur Erörterung liefern können.

Es ist auffallend, dafs oft Substanzen, welche die Kohlensäure mit Begierde anziehen, dieselbe nicht bei Abwesenheit von Wasser zu absorbiren im Stande sind. Wir haben gesehen, dafs bei gewöhnlicher Temperatur die trocknen alkalischen Erden, und das Kalihydrat KH diefs nicht zu thun vermögen; aber auch selbst bei erhöhter Temperatur nehmen manche Substanzen die Kohlensäure nicht auf, und verbinden sich nur bei Gegenwart von Wasser mit derselben.

Zu diesen Substanzen gehört der sogenannte neutrale Borax, NaB , der schon im krystallisirten wasserhaltigen Zustande, noch schneller in der Auflösung, Kohlensäure auszieht, und dann gewöhnlichen Borax NaB' und kohlensaures Natron bildet. Es ist schwer, die Krystalle des Salzes zu entwässern, ohne dafs es nicht während des Entwässerns Kohlensäure anzieht. Hat man aber vollständig das Wasser verjagt, so zieht es keine Kohlensäure an, wenn dieselbe ihm vollkommen wasserfrei dargeboten wird. Ich habe über das trockne Salz bei der Rothgluth lange

trocknes Kohlensäuregas geleitet, ohne dafs es dadurch an Gewicht zunahm, was wir auch sehr erklärlich finden müssen, da bei der Rothgluth aus dem kohlensauren Natron Kohlensäure durch Borax ausgetrieben wird, aber auch bei der gewöhnlichen Temperatur nimmt das vollkommen trockne Salz nach langer Zeit nur dann Kohlensäure auf, wenn diese nicht vollkommen trocken ist.

Erklärlicher ist es, dafs das phosphorsaure Natron Na^3P unter denselben Umständen wie der neutrale Barax trockne Kohlensäure nicht absorbirt. Dieses Salz ist noch schwerer zu entwässern, ohne dafs es nicht während des Entwässerns etwas Kohlensäure anzieht als diefs bei dem neutralen Borax der Fall ist. Aber vollständig entwässert zieht es keine Kohlensäure an, wenn diese im trocknen Zustand bei der Rothgluth über dasselbe geleitet wird, und bei gewöhnlicher Temperatur mufs die Kohlensäure nicht vollkommen trocken seyn, wenn sie absorbirt werden soll. Es scheint aber dieses Salz nur dann kohlensaures Natron erzeugen zu können, wenn zugleich sich auch $\text{Na}^2\text{H}\ddot{\text{P}}$ bildet; die Anwesenheit des Wassers ist daher bei der Zersetzung durchaus nothwendig.

Wenn Wasser und Kohlensäure sich gegenseitig aus ihren Verbindungen austreiben und als Säuren auftreten, so unterscheiden sich beide wesentlich in einer Hinsicht. Das Wasser gehört zu den Oxyden, welche gegen starke Basen die Rolle der Säure spielen, aber mit starken Säuren verbunden, als Base betrachtet werden mufs. Ich habe früher gezeigt, dafs wenn es als Base auftritt, es andere schwache Basen aus ihren Verbindungen mit Säuren abscheiden kann. — Die Kohlensäure ist zwar jedenfalls eine der schwächsten Säuren, aber nie, auch nicht gegen die stärksten Säuren tritt sie als Base auf.

Daher verbindet sich die Kohlensäure nicht mit Wasser zu einer chemischen Verbindung. Sie zeigt vorzugsweise diese Eigenschaft, und theilt sie nur mit solchen unorganischen Säuren, die auf nassem Wege gleich schwache

Säuren wie die Kohlensäure sind, namentlich mit der Borsäure und der Kieselsäure, die wenigstens ihren Wassergehalt leicht verlieren, und sich dann in ihren chemischen Eigenschaften nicht wesentlich verändern. Die meisten von den Metalloxyden, die nur selten als Basen und öfterer als schwache Säuren auftreten, zeigen dieselbe Eigenschaft. Auch unter den organischen Säuren finden wir etwas Aehnliches. Nur die schwächsten von ihnen können wasserfrei dargestellt werden, wie z. B. die verschiedenen Gerbsäuren, die man als wasserfrei betrachten kann, obgleich auch sie von einigen Chemikern für wasserhaltig gehalten werden, und mehrere Harze, namentlich die, welche viel Sauerstoff enthalten.

Es giebt indessen Verbindungen, in welchen man in der That die Kohlensäure als mit Wasser verbunden annehmen kann. Es sind die alkalischen Bicarbonate von Kali und von Natron.

Es ist bekannt, daß beide nicht ohne Wasser dargestellt werden können, und daß, wenn das zweite Atom von Kohlensäure, das in diesen Salzen nur schwach gebunden ist, durch erhöhte Temperatur ausgetrieben wird, es gemeinschaftlich mit dem Wasser entweicht.

Betrachtet man die Kohlensäure als eine sogenannte einbasische Säure, so sind die Bicarbonate der Alkalien saure Salze, oder man kann sie betrachten, wie so viele saure Salze als neutrale Doppelsalze, in welchen die Säure mit zwei Basen, von denen die eine Wasser, verbunden ist.

Bei letzterer Annahme aber müßte das Wasser Base gegen Kohlensäure seyn, eine Ansicht, welche durch die Versuche, welche in dieser Abhandlung mitgetheilt sind, nicht bekräftigt werden kann.

Es schien mir möglich durch Versuche zu entscheiden, ob in den Bicarbonaten der Alkalien eine chemische Verbindung von Wasser und Kohlensäure angenommen werden kann.

Das

Das krystallisirte zweifach-kohlensaure Kali im zerriebenen Zustande, erleidet, wie ich schon vor längerer Zeit gezeigt habe ¹⁾, im luftleeren Raume über concentrirter Schwefelsäure und über trockenem Kalihydrat nur einen unbedeutenden Verlust, 0,05 bis 0,21 Proc. im ersten und 0,49 Proc. im zweiten Falle.

Wurde das Salz einer Temperatur von 100° C. ausgesetzt, so betrug der Gewichtsverlust 0,20 Proc. Bis zu 130° C. erhitzt, war der Gewichtsverlust 8,26 Proc. und bei 150° 15,30 Proc. Bei andern Versuchen war der Gewichtsverlust bei diesen Temperaturen gröfser oder geringer, je nachdem das Salz derselben längere oder kürzere Zeit ausgesetzt worden war. Bei 160° C. betrug der Gewichtsverlust 30,83 Proc., und auch nach einem Erhitzen von vielen Stunden bei dieser Temperatur verminderte sich das Gewicht des Salzes nicht mehr. Aber der Gewichtsverlust bei 160° beträgt ganz nahe so viel, wie der Gehalt des Wassers und des zweiten Atoms der Kohlensäure. Wurde das Salz darauf schwach geglüht, so erlitt es nur noch einen Gewichtsverlust von 0,20 Proc. — Das angewandte zweifach-kohlensaure Kali hatte also durchs Erhitzen an Wasser und Kohlensäure genau so viel verloren, wie es nach der Berechnung erfolgen soll, denn es besteht nach dieser im Hundert aus:

Einfach kohlensaures Kali 69,04

Kohlensäure und Wasser 30,96

100,00.

Das zweifach-kohlensaure Kali verliert also schon bei 160° das Wasser und das zweite Atom der Kohlensäure. Nach Jacquelin fängt das Bicarbonat von Kali erst bei 190° C. an sich zu zersetzen ²⁾.

Das zweifach-kohlensaure Kali wurde bei einem neuen Versuche mehrere Stunden hindurch einer Temperatur von 130° C. ausgesetzt. Ein Theil des Rückstands wurde der Untersuchung unterworfen; er bestand nach den Versu-

1) Pogg. Ann. Bd. 34, S. 149.

2) *Ann. de Chim. et de Phys.* 3. Reihe, Bd. 32, S. 209.

Poggendorff's Annal. Bd. LXXXVI.

chen des Hrn. Weber, der auch sämmtlich die folgenden quantitativen Untersuchungen angestellt hat, im Hundert aus:

		Sauerstoff:
Kali	54,52	9,25
Kohlensäure	38,26	27,83
Wasser	7,22	6,41
	<u>100,00.</u>	

Das Uebrige wurde darauf zehn Stunden hindurch bei einer Temperatur von 130° bis 140° C. erhitzt, und ein Theil wiederum zur Untersuchung angewandt. Er bestand aus:

		Sauerstoff.
Kali	58,28	9,89
Kohlensäure	35,76	26,01
Wasser	5,96	5,30
	<u>100,00.</u>	

Der erhaltene Rückstand wurde nun mehrere Stunden hindurch einer Temperatur von 150° C. ausgesetzt. Er zeigte dann in einem Theile sich folgendermaßen zusammengesetzt:

		Sauerstoff.
Kali	63,82	10,83
Kohlensäure	34,26	24,92
Wasser	1,92	1,71
	<u>100,00.</u>	

Wäre das Uebrige einer Temperatur von 160° ausgesetzt worden, so würde man, wie aus dem oben beschriebenen Versuche sich ergibt einfach-kohlensaures Kali erhalten haben, welches im Hundert besteht aus:

		Sauerstoff.
Kali	68,18	11,57
Kohlensäure	31,82	23,14
	<u>100,00.</u>	

Berechnet man die erhaltenen Resultate auf die Menge des Kali's, welches im unzersetzten zweifach-kohlensauren Salze enthalten ist, so erhält man folgende Zusammensetzungen:

Unzersetztes zweifach-kohlensaures Kali.	Nach dem ersten Erhitzen.	Nach dem zweiten Erhitzen.	Nach dem dritten Erhitzen.	Einfach-kohlens. Kali.
Kali 47,07	47,07	47,07	47,07	47,07
Kohlensäure 43,93	33,03	28,88	25,27	21,97
Wasser 9,00	6,23	4,81	1,41	
100,00	(86,33)	(80,76)	(73,75)	(69,04).

Durchs Erhitzen
verjagte:

Kohlensäure 10,90	4,15	3,61	3,30
Wasser 2,77	1,42	3,40	1,41
100,00	86,33	80,76	73,75.

Wäre im zweifach-kohlensauren Kali das zweite Atom der Kohlensäure mit dem Wasser als eine chemische Verbindung enthalten gewesen, in denen die Bestandtheile mit einer gewissen Innigkeit verbunden sind, so würden aus dem Bicarbonate durchs Erhitzen Kohlensäure und Wasser gleichförmig verflüchtigt worden seyn. Dafs dies aber nicht der Fall gewesen ist, ergibt sich aus den Resultaten der beschriebenen Versuche. Durch allmähliges Erhitzen entweichen aus dem Bicarbonate Quantitäten von Kohlensäure und von Wasser, die in gar keinem bestimmten Verhältnisse zu einander stehen; denn die Mengen des Wassers verhielten sich zu denen der Kohlensäure nach den angegebenen Versuchen folgendermaßen:

I. 1 : 3,94

II. 1 : 2,92

III. 1 : 1,06

IV. 1 : 2,37.

Es folgt hieraus, dafs wenn man das Bicarbonat als eine Verbindung von einfach-kohlensaurem Kali mit Kohlensäure und Wasser ansieht, letzteres gleichsam als Krystallwasser enthalten gewesen seyn mufs.

Das zweifach-kohlensaure Natron verliert das Wasser und das zweite Atom der Kohlensäure bei einer niedrigeren Temperatur als das zweifach-kohlensaure Kali. Wird das Salz im zerriebenen Zustande einer Temperatur von nur

100° C. ausgesetzt, so kann es vollständig in einfach-kohlensaures Natron verwandelt werden. Eine Quantität von 5,150 Grm. des Bicarbonats mußten aber drei Tage bei dieser Temperatur erhalten werden; sie wogen dann 3,277 Grm., und hatten also einen Gewichtsverlust von 36,37 Proc. erlitten. Der Verlust muß 36,84 Proc. betragen, wenn das zweite Atom der Kohlensäure und das Wasser entwichen waren. Durch ein gelindes Glühen wurde das Gewicht des Salzes zu 3,270 Grm. vermindert; der Gewichtsverlust war also dann 36,50 Proc.

Das zweifach kohlensaure Natron verliert also im trocknen Zustande das Wasser und das zweite Atom der Kohlensäure schon bei der Kochhitze des Wassers, obgleich außerordentlich langsam. Jedenfalls scheint es nicht rathsam, das Salz bei seiner Bereitung im Großen zum Trocknen dieser Temperatur auszusetzen, wenigstens nicht lange, wie ich es an Orten gesehen habe, wo man das Bicarbonat fabrikmäßig bereitet.

Das Natron-Bicarbonat wurde so lange der Temperatur von 100° C. ausgesetzt, bis es über 22 Proc. verloren hatte. Die Untersuchung zeigte dann folgende Zusammensetzung im Hundert:

		Sauerstoff.
Natron	48,58	12,97
Kohlensäure	46,66	33,94
Wasser	4,76	4,23
	<u>100,00.</u>	

Berechnet man das erhaltene Resultat auf die Menge des Natrons, welche im Bicarbonate enthalten ist, so erhält man folgende Zusammenstellung:

	Unzersetztes zweifach-kohlensaures Natron.	Nach dem Erhitzen.
Natron	37,01	37,01
Kohlensäure	52,27	35,57
Wasser	10,69	3,63
	<u>100,00.</u>	<u>76,24.</u>

Durchs Erhitzen verjagte		Sauerstoff.
Kohlensäure	16,70	12,14
Wasser	7,06	6,27
	100,00.	

Beim Erhitzen des Natron-Bicarbonats sind bei diesem Versuche Kohlensäure und Wasser beinahe, aber doch nicht ganz zu gleichen Atomen, wie sie mit dem einfach-kohlensauren Salze verbunden angenommen werden können, verflüchtigt worden. Dieß mag aber, wenn man von dem Verhalten des Kali-Bicarbonats auf das des Natron-Bicarbonats schließt, wohl mehr Zufall seyn.

Anhang.

Ueber die Niederschläge, welche in den Auflösungen der Salze der alkalischen Erden durch zweifach-kohlensaure Alkalien entstehen.

Es ist in diesen Untersuchungen nicht von der Einwirkung der zweifach-kohlensauren Alkalien auf die Salze der alkalischen Erden gehandelt worden. Die Angaben, die man darüber in den Lehrbüchern findet, sind oft in etwas widersprechend; es mußte mir aber viel daran liegen, diese Einwirkung genau kennen zu lernen, um die zweifach-kohlensauren mit den zweifach-borsauren Alkalien oder vielmehr mit dem gewöhnlichen Borax in ihrem Verhalten zu den Salzen der alkalischen Erden vergleichen zu können.

Darin stimmen die meisten Chemiker überein, daß durch die zweifach-kohlensauren Alkalien nicht zweifach-kohlensaure alkalische Erden im festen Zustande, sondern nur in Auflösungen erhalten werden können. Aber Boussingault giebt an¹⁾, daß man durch Fällung von Auflösungen von Chlorbaryum und von anderthalbfach-kohlensaurem Natron (dem natürlichen, in Süd-Amerika unter dem Namen Urao sich findenden) eine anderthalbfach-kohlensaure Baryterde erhalte, die merklich löslich in Wasser sey, denn obgleich ein Ueberschuß des Natronsalzes zur Fällung angewandt

1) *Ann. de Chimie et de Physique* Bd. 29, S. 287.

wurde, so trübte sich das Wasser durch hinzugefügte Schwefelsäure. Bei der Fällung konnte keine Entwicklung von Kohlensäure wahrgenommen werden. Der Niederschlag hatte die Zusammensetzung $2\text{Ba} + 3\text{C}$.

Ein solches Salz mußte leichter als durch anderthalbfach- durch zweifach-kohlensaures Alkali erhalten werden können, aber obgleich eine Chlorbaryumauflösung in verschiedenen Verhältnissen mit demselben behandelt wurde, so konnte nur einfach-kohlensaure Baryterde dargestellt werden. Es wurden folgende Versuche angestellt:

I. Gleiche Atomgewichte von Chlorbaryum und von zweifach-kohlensaurem Kali, jedes der Salze in 20 Theilen kalten Wassers gelöst, wurden so mit einander gemischt, daß die Lösung des Kalisalzes nach und nach zu der des Chlorbaryums gesetzt wurde. Zuerst entstand nur eine geringe Trübung, die aber sich vollständig wieder auflöste; nachdem ungefähr $\frac{4}{5}$ der Kalilösung verwandt worden war, ohne daß ein Niederschlag sich erzeugt hatte, konnte erst durch den Rest eine Fällung, aber in nicht bedeutender Menge, erhalten werden, die sich durchs Stehen nicht sichtlich vermehrte. Es war bei der Fällung keine Kohlensäure-Entwicklung zu bemerken, erst nachdem der Niederschlag eine halbe Stunde hindurch gestanden hatte, fingen an kleine Gasblasen in die Höhe zu steigen. Nach dieser Zeit wurde er filtrirt und ohne ausgewaschen zu werden, zwischen Fließpapier geprefst.

Durch Salpetersäure wurden aus ihm 15,41 Proc. Kohlensäure ausgetrieben; die salpetersaure Auflösung gab mit Silberoxydlösung versetzt, nur eine Opalisirung. Durchs Glühen blieben 58,3 Proc. kohlensaure Baryerde zurück, welche in schwefelsaure Baryterde verwandelt 57,07 Proc. gaben. Das Verhältniß zwischen Kohlensäure und Baryterde in dem feuchten Niederschlage war daher folgendes.

		Sauerstoff.
Baryterde	57,07	5,95
Kohlensäure	15,41	11,21.

Der Verlust besteht in Wasser, sowie in geringen Mengen von Chlor und von Kali.

Die von der ausgeschiedenen kohlsauren Baryterde getrennte Flüssigkeit enthielt noch sehr viel Baryterde aufgelöst. Sie wurde vier Wochen hindurch bei Seite gesetzt; während dieser ganzen Zeit bildeten sich auf der Oberfläche derselben deutlich krystallinische Ueberzüge, und auch an den Wänden des Gefäßes setzten sich krystallinische Krusten ab. Die Flüssigkeit enthielt nach dieser Zeit nur Spuren von aufgelöster Baryterde.

Das Ausgeschiedene bestand, aufser undeutlich krystallinischen Massen, größtentheils aus deutlichen prismatischen Krystallen, wie dieß besonders die mikroskopische Untersuchung zeigte. Nachdem sie nur ein wenig mit kaltem Wasser abgespült worden, wurden sie zwischen Löschpapier geprefst. Die Untersuchung der noch etwas feuchten Masse, durch Hrn. Weber, welcher auch die andern Analysen angestellt hat, ergab folgende Zusammensetzung:

		Sauerstoff.
Baryterde	73,55	7,69
Kohlensäure	19,96	14,52.

Die Menge der Baryterde ist gegen die der Kohlensäure, um etwas größer, als in der einfach-kohlensauren Baryterde, was aber nur von etwas noch eingemengtem unzersetztem Barytsalze herrühren kann.

II. Eine etwas concentrirte Chlorbaryumlösung wurde durch einen Ueberschuß einer Lösung von zweifach-kohlensaurem Kali zersetzt. Bei der Fällung fand eine starke Kohlensäure-Entwicklung statt. Der erhaltene Niederschlag wurde nach dem Filtriren, ohne ausgewaschen zu werden, zwischen Fließpapier geprefst, und blieb 24 Stunden hindurch zwischen Fließpapier liegen. Durchs Glühen erlitt er nur einen Verlust von 1,05 Proc., welche aus Feuchtigkeit bestanden. Also auch dieser Niederschlag bestand aus neutraler kohlsaurer Baryterde.

III. Ein Atomgewicht von Chlorbaryum und fast zwei des zweifach-kohlensauren Kalis, jedes der Salze in 20 Theilen kalten Wassers gelöst, wurde so mit einander gemischt, daß die Lösung des letztern in die des erstern gegossen wurde. Es entstand anfangs nur ein geringer Niederschlag, der sich aber durchs Stehen vermehrte. Das Ganze blieb während 14 Tage stehen, während welcher Zeit ununterbrochen kleine Gasbläschen aus dem Niederschlage und der Flüssigkeit aufstiegen. Der Niederschlag wurde nach dem Filtriren, ohne ausgewaschen zu werden, zwischen Fliesspapier gepreßt. Bei der mikroskopischen Besichtigung zeigte er sich nicht deutlich krystallinisch. Die filtrirte Flüssigkeit enthielt keine Baryterde.

Durchs Glühen des Niederschlags erlitt dieselbe einen Verlust von 5,6 Proc. von Feuchtigkeit; durch Salpetersäure wurden 21,96 Proc. Kohlensäure entbunden. Das Verhältniß zwischen Baryterde und Kohlensäure war daher folgendes:

		Sauerstoff.
Baryterde	74,05	7,74
Kohlensäure	21,96	15,97.

Es glückte also nicht aus Lösungen des Chlorbaryums durch Behandlung mit zweifach-kohlensaurem Kali eine kohlensaure Baryterde zu erhalten, die mehr Kohlensäure als das einfach-kohlensaure Salz enthält. Versuche durch das etwas schwerlöslichere zweifach-kohlensaure Natron, statt des zweifach-kohlensauren Kalis ein anderes Resultat zu erhalten, wurden nicht angestellt.

Aehnliche Versuche, aber mit gleichem ungünstigen Resultate, wurden mit Kalkerdesalzen angestellt.

I. Gleiche Atomgewichte von krystallisirtem Chlorcalcium und von zweifach-kohlensaurem Kali, jedes der Salze in 20 Theilen von kaltem Wasser aufgelöst, wurden mit einander vermischt. Die ersten Quantitäten der zur Chlorcalciumlösung gegossenen Kalilösung, brachten keine Trübung hervor; erst als ungefähr das letzte Achtel derselben hinzugefügt war, bildete sich ein geringer Niederschlag,

der durchs Stehen sich nicht vermehrte. Eine Kohlensäure-Entwicklung konnte dabei nicht bemerkt werden. Nach einer halben Stunde wurde die kleine Menge der erhaltenen Fällung filtrirt, und ohne sie auszuwaschen zwischen Fliesspapier geprefst.

Durch Salpetersäure wurden 35,00 Proc. Kohlensäure entwickelt; die Auflösung gab mit Silberoxydlösung nur eine Opalisirung. Durch Glühen und nachherige Behandlung mit einer Lösung von kohlensaurem Ammoniak wurden 78,40 Proc. kohlensaure Kalkerde erhalten, die 44,00 Proc. Kalkerde entsprechen. Die unmittelbare Bestimmung ergab also folgendes Verhältniß:

		Sauerstoff.
Kalkerde	44,00	12,51
Kohlensäure	35,00	25,45.

Der Verlust besteht in Wasser und in einer geringen Menge von Kali und Chlormetall, welche durch Pressen nicht entfernt werden konnten.

Die filtrirte Lösung setzte nach langem Stehen nur einen außerordentlich geringen Niederschlag ab.

II. Ein Atomgewicht des Chlorcalciums und zwei des zweifach-kohlensauren Kalis, jedes der Salze in 20 Theilen kalten Wassers gelöst, gaben anfänglich fast keine Fällung und erst nach mehreren Tagen hatte sich ein deutlich krystallinischer Niederschlag erzeugt. Das Ganze wurde 14 Tage hingestellt, während welcher Zeit ununterbrochen Gasblasen sich entwickelten. Der Niederschlag wurde ohne auszuwaschen zwischen Fliesspapier getrocknet. Durchs Auflösen in Salpetersäure wurden daraus 41,24 Proc. Kohlensäure entwickelt; durchs Glühen und nachherige Behandlung mit kohlensaurem Ammoniak wurden 95,88 Proc. kohlensaure Kalkerde erhalten. Das Verhältniß zwischen Base und Säure ist daher folgendes:

		Sauerstoff.
Kalkerde	53,92	15,33
Kohlensäure	41,24	30,00.

Das Fehlende bestand in Feuchtigkeit, und den gerin-

gen Mengen der Salze, die durchs Trocknen mittelst Fließpapier nicht völlig entfernt werden konnten.

Bei der mikroskopischen Besichtigung zeigte sich der Niederschlag aus großen und deutlichen Rhomboëdern bestehend. Schon mein Bruder hat vor längerer Zeit solche rhomboëdrischen Krystalle der kohlensauren Kalkerde erhalten, als er eine Auflösung der kohlensauren Kalkerde in kohlensaurem Wasser der Luft aussetzte¹⁾. Er erhielt sie zuweilen so groß, daß man ihre Form nicht allein mit bloßen Augen erkennen, sondern auch ihre Winkel mittelst des Reflexionsgoniometers messen konnte.

Die von dem krystallinischen Niederschlage abfiltrirte Flüssigkeit enthielt nur sehr geringe Mengen von Kalkerde.

Es ergibt sich aus diesen Versuchen, daß die alkalischen Erden, wenigstens Baryterde und Kalkerde, sich zu festen Verbindungen mit Kohlensäure nur als einfach-kohlensaure Salze verbinden, und daß die Verbindungen, welche mehr Kohlensäure enthalten nur aufgelöst bestehen können.

V. *Ueber Albumin und Casein;* *von N. Lieberkühn.*

(Schluß von S. 130.)

Ueber die in der Milch vorkommende beim Kochen coagulirende Substanz.

In der Milch soll außer dem beschriebenen, an Alkali gebundenen, Körper ein anderer vorkommen, welcher die charakteristische Eigenschaft hat, durch Erhitzen zu gerinnen. Scherer hat gefunden, daß in der Flüssigkeit der sauer gewordenen Milch beim Erwärmen »eine dem Eiweis sich gleich verhaltende« Substanz niederfällt. C. G. Mitscherlich giebt in seinem Lehrbuch der Arzneimittellehre (neueste

1) Pogg. Ann. Bd. 42, S. 353.

Auflage) an, daß Quevenne das Eiweiß als constanten Bestandtheil der Milch nachgewiesen habe; Quevenne trennte durch sehr dichtes Filtrirpapier die frische Milch in einen unlöslichen Theil, welcher auf dem Filtrum zurückblieb, und in einem löslichen, welcher abließ und eine opalisirende Flüssigkeit bildet, die beim Erhitzen sich trübt, wie eine verdünnte Auflösung von Eiweiß. Es gelang mir, diese Beobachtung bestätigt zu sehen, indem ich ein doppeltes Filtrum von besonders dichtem Papier anwandte. Lehmann hält es nicht für richtig, die coagulirbare Substanz, wie sie zuweilen in der Milch vorzukommen scheine, für eine in bloßer Hitze coagulirbare Modification des Caseins zu nehmen, sondern glaubt, daß die Säure nur einen Theil des in der Lösung befindlichen Caseinnatrons in ein saures Salz verwandelt habe, und daß durch Erhitzen die sauern in Lösung gebliebenen Salze zersetzt werden und Casein herausfalle. Die Versuche, welche hier entscheiden, zerfallen in zwei Reihen, in die, wo Säure enthaltende, und in die, wo frische Milch angewandt wird. Es ist leicht, sich von der Richtigkeit der Scherer'schen Beobachtungen zu überzeugen; man läßt Milch sauer werden und filtrirt, oder man fällt frische Milch durch Essigsäure im Ueberschuß. Das Filtrat zeigt in beiden Fällen durch Erhitzen eine deutliche Coagulation. Möglicherweise könnte auch folgender Versuch über die Gegenwart des Eiweiß Aufschluß geben. Neutral reagirende Milch wurde bei 40° C. auf dem Wasserbade eingedampft; der weiße Rückstand wurde pulverisirt, mit wenig Wasser zu einem Brei zusammengerieben und so auf ein Filtrum gebracht; das opalisirende Filtrat gerann beim Erhitzen in Flocken, und wenn es vorher mit etwas Wasser verdünnt war, trübte es sich stark, ohne Flocken abzusetzen, gerade wie das nach Quevenne gewonnene Serum der frischen Milch. Auch bei diesem Eindampfen zeigt die Milch zuletzt eine saure Reaction. Beide Versuche gestatten die Annahme von löslichem Eiweiß in der Milch nicht; denn 1) giebt gekochte Milch, mit Milchsäure oder Essigsäure zur Coa-

gulation gebracht, in der vom Niederschlag abfiltrirten Flüssigkeit dieselbe Erscheinung, wie die ungekochte, und 2) läßt sich auch aus neutraler, bei 100° C. abgedampfter Milch in der vorhin angeführten Weise die coagulirbare Substanz darstellen. Wäre diese aber lösliches Eiweiß, so hätte sie bei der angewandten hohen Temperatur unlöslich werden müssen. Die Erscheinung findet ihre Erklärung durch einen Vergleich mit dem Alkalialbuminat; versetzt man eine neutrale Lösung desselben mit wenig Essigsäure und erhitzt, so tritt sogleich Coagulation ein; es darf nicht zu viel Säure hinzugefügt werden, sonst gelingt der Versuch nicht, die Flüssigkeit muß eben sauer reagiren und der beim Zusatz sich bildende Niederschlag vollständig aufgelöst seyn. Der Proceß, der hier vor sich geht, ist anscheinend der, daß die Säure zuerst das Kali sättigt und das Albumin ausscheidet und im geringsten Ueberschuß es wieder auflöst, so daß sich in der Auflösung essigsaures oder milchsaures Kali, etwas freie Säure und Eiweiß befindet, welches beim Erwärmen herausfällt. Denn fällt man solche Auflösung mit absolutem Alkohol, so bekommt man coagulirtes Eiweiß als Niederschlag. Beiläufig sey nur hier eines auffallenden Verhaltens des Kalialbuminats gegen die Salpetersäure (oder Salzsäure) erwähnt, welches an den von Bence Jones analysirten Körper erinnert, den er in dem Harn eines an Knochenerweichung leidenden Menschen auffand. Versetzt man eine Lösung desselben mit wenig Salpetersäure, so entsteht ein Niederschlag, der im geringen Ueberschuß der Säure verschwindet und auf Zusatz von noch mehr wieder erscheint, aber beim Kochen der Flüssigkeit sich auflöst, um beim Erkalten als gelatinöse Masse wieder herauszufallen. Die bloße Gerinnbarkeit lehrt also über die Gegenwart von uncoagulirtem Eiweiß in einer sauren Flüssigkeit gar Nichts. Wie ist es aber nun mit der neutralen Lösung, wie sie Quevenne anwandte? Mitscherlich nimmt ohne weiteres die Existenz des löslichen Eiweiß in der Milch an. Quevenne's Versuch giebt hierüber keinen Aufschluß,

so sehr er auch anderweitig von Interesse ist: denn es läßt sich aus der bei 100° C. eingedampften frischen, eben dem Organismus entzogenen Milch eine *neutrale* Flüssigkeit gewinnen, welche durch Erhitzen gerinnt. Frische noch warme Milch von deutlicher Alkalescenzenz wurde auf dem Wasserbade eingedampft, der weiße Rückstand pulverisirt und mit wenig destillirtem Wasser zu einem Brei angerieben, der keine Spur einer sauren Reaction zeigte: die durch Filtration abgesonderte opalisirende Flüssigkeit gerann beim Erwärmen. Diefs kann aber nicht von uncoagulirtem Eiweiß herrühren. Möglicher Weise ist es jedoch dieselbe Substanz, oder das Casein in demselben Zustande, wie es in der frischen Milch, nach Quevenne's Versuch, die Gerinnung veranlaßt. Dafs auch neutrale Lösungen beim Erhitzen gerinnen können, die kein uncoagulirtes Eiweiß enthalten: diels zeigt die wässerige Lösung des Kalialbuminats, wenn man sie mit Chlorbaryum oder Chlorcalcium versetzt und nun kocht; es tritt dann sogleich eine starke Coagulation ein.

Um mit Sicherheit festzustellen, ob lösliches Eiweiß in der normalen Milch vorhanden sey, giebt es nur ein Mittel: diels ist die Behandlung derselben nach der Methode von Wurtz. Frische Milch wurde mit basisch essigsaurem Bleioxyd gefällt, und der ausgestüßte Niederschlag, mit Wasser angerührt, längere Zeit einem Strome von Kohlensäure ausgesetzt.

In dem Filtrat fand sich jedoch auch nicht eine Spur einer durch Erwärmen coagulirbaren Substanz vor. Auch aus dem Albuminbleioxyd, welches durch Fällung einer Kalialbuminatlösung mittelst basisch essigsaurem Bleioxyd gewonnen ist, läßt sich durch einen Strom von Kohlensäure das coagulirbare Eiweiß nicht wieder abscheiden, während diels doch so leicht gelingt, wenn das Albuminbleioxyd durch Fällung einer einfachen Lösung von dem Eiweiß der Eier dargestellt ist. Dadurch, dafs das Eiweiß mit dem Kali in Verbindung getreten ist, hat es sein Verhalten verändert. Nach den angeführten Versuchen sind

wir nicht berechtigt, Eiweiss als normalen Bestandtheil der Milch anzunehmen.

Die in der Milch vorkommenden Formen des Caseins.

Die Formen, in denen wir bisher das Casein betrachtet haben, waren 1) in seiner Verbindung mit Alkali, wo es bis-jetzt mit dem Kalialbuminat vollkommen übereinstimmende Eigenschaften zeigte; 2) nach der Einwirkung der Milchsäure im äusserst geringen Ueberschufs, wo es die Eigenschaften des in den Lehrbüchern beschriebenen löslichen Caseins darbot und durch Eindampfen nicht ganz frischer Milch gewonnen wurde. Auch das Kalialbuminat gab, mit etwas Milchsäure oder Phosphorsäure versetzt, beim Eindampfen eine sich gerade so verhaltende Substanz; 3) nach Einwirkung der Milchsäure oder Essigsäure in größerem Ueberschufs, wo es beim Erhitzen gerinnt. Auch diese Erscheinung konnte in dem Kalialbuminat durch einen Ueberschufs von Essigsäure und Erwärmen hervorgerufen werden; 4) in seiner coagulirbaren Form in neutralen Lösungen; so tritt es auf, wenn die Milch nach Quevenne's Methode filtrirt und das Filtrat gekocht wird, oder wenn man eben gemolkene Milch zur Trockne eindampft und mit kaltem Wasser den pulverisirten Ruckstand extrahirt. Das Kalialbuminat ist durch Erhitzen coagulirbar, wenn es mit einer wässrigen Auflösung Chlorcalcium oder Chlorbaryum versetzt wird. In der ersten und vierten Form findet sich das Casein in der frischen Milch constant vor, aufser diesen aber noch in einer, deren wir noch nicht Erwähnung gethan haben und deren wesentlichste Eigenschaft erst durch Quevenne's Versuch klar geworden ist. Man erhält es in dieser, wenn man die Milch mit Essigsäure oder überhaupt einer solchen Säure fällt, welche das Kalialbuminat oder das Caseinnatron zwar niederschlägt, im geringsten Ueberschufs aber wieder vollständig auflöst. Was dann in der Milch ungelöst zurückbleibt, ist diese

Form. Sie wird auch auf die Weise als eigenthümlich erkannt, daß man in concentrirter Essigsäure einen Tropfen Milch fallen läßt, es bleibt dann eine zusammenhängende weiße Substanz zurück, die sich nur schwierig auflöst; nimmt man aber einen Tropfen Serum, nach Quevenne dargestellt, oder einen Tropfen einer Kalialbuminatlösung, so verschwindet die Fällung sofort. Eine zweite Darstellungsmethode beruht darauf, daß das Caseinalkali, wie das Kalialbuminat, mit ätherhaltigem Weingeist gefällt und sogleich mit heißem Spiritus oder Wasser behandelt, sich ganz wieder auflöst; das Zurückbleibende ist dieses Casein; es hinterläßt bekanntlich eine neutral reagirende Asche. Endlich erhält man es direct nach Quevenne als Rückstand auf dem Filtrum, wenn man durch dichtes Filtrirpapier die in der Milch gelösten Substanzen entfernt werden. Daraus ersieht man das ihm besonders Eigenthümliche, daß es in der Milch nicht gelöst existirt, wie die andern Formen. Man könnte vielleicht daran denken, daß es trotzdem in der Milch aufgelöst wäre und die Poren des Filtrums es an dem Durchlaufen verhinderten, so wie man dies wohl am löslichen Eiereiweiß beobachtet, welches nur durch besondere Vorrichtungen filtrirbar wird: aber es ist leicht, sich vom Gegentheil zu überzeugen, man muß dann nur wenig Milch auf das Filtrum bringen, das Ab laufende reagirt noch alkalisch, wenn dies auch vorher geschah, und das Zurückbleibende läßt sich mit Wasser auswaschen; beim Eiweiß wird die erwähnte Eigenschaft nur durch die beigemengte sogenannte Zellensubstanz bewirkt; denn nach Wurtz dargestelltes uncoagulirtes Eiweiß geht ebenso leicht durchs Filtrum, wie andere wäßrige Lösungen. Diese letzte Form des Caseins ist also dadurch charakteristisch, daß es sich bei Behandlung der Milch mit einem Ueberschuß von Essigsäure oder Milchsäure nicht auflöst, wie das an Natron gebundene, daß es sich ebenso verhält bei der Behandlung mit Weingeist und daß es ungelöst in der Milch existirt.

Ueber den Einfluss einiger Salze und Säuren auf das Casein.

Es ist viel darüber verhandelt worden, ob die das Casein begleitenden Kalksalze auf dasselbe einen solchen Einfluss ausüben, dass dadurch die Einwirkung der Reagentien und Lösungsmittel modificirt werde. So wie es durch Wurtz's Versuche aufser Zweifel gestellt ist, dass das lösliche Eiweiss ausschliesslich vom Wasser gelöst erhalten, und seine Coagulirbarkeit durch keine andere Substanz bedingt ist, so gilt auch jetzt für das Alkalialbuminat und damit auch für das Caseinnatron, dass auf seine bekannten Eigenschaften die Kalksalze nicht influiren: obgleich es nicht gelingt, es in seiner löslichen Form von ihnen zu befreien, so findet sich doch beim Kalialbuminat alles analog vor und diefs ist frei von jeder erheblichen Beimengung. Dass aber bei dem Casein eine so grosse Wandelbarkeit des Verhaltens existirt, davon liegt die Ursache, so weit wir es bis jetzt und zwar ausschliesslich an der Milch der Kühe, beobachtet haben, in der steten Vermehrung der Milchsäure, der die Milch ausserhalb des Organismus durch fortwährende Umbildung des Milchzuckers unterworfen ist. Hervorzuheben ist hier besonders, worauf Lehmann in seinem Lehrbuch der physiologischen Chemie aufmerksam macht, dass einmal eine säuerliche Caseinlösung, wenn sie trüb ist, durch Erhitzen völlig klar wird, ein ander Mal dagegen das Casein sich vollständig ausscheidet; hiervon ist einzig und allein die Ursache der grössere oder geringere Gehalt an Säure. Denn versetzt man frische Milch mit so viel Essigsäure, dass sie eben coagulirt, filtrirt ab und kocht das Filtrat, so gerinnt es stark; versetzt man dagegen dieselbe Milch mit einer grössern Quantität dieser Säure, und kocht nun das Filtrat, so gerinnt es gar nicht, oder giefst man zu ersterem Filtrat noch etwas Essigsäure, so gerinnt es durch Erwärmen nicht mehr. Lehmann führt ferner an, dass Essigsäure in der Milch der Kühe sowohl als anderer Thiere nicht selten eine geringe Fällung bewirke, ein eigentliches Coa-

Coagulum sich aber erst beim Kochen ausscheide. Bei den Untersuchungen der Kuhmilch ist mir diese Erscheinung bis jetzt nicht vorgekommen; nur so viel steht fest, daß das Caseinalkali bei Zusatz von Essigsäure oder Milchsäure in nicht zu großem Ueberschuß durch Erhitzen gerinnt, und daß die frische Milch, wenn sie durch wenig Essigsäure nur theilweise coagulirt, stets einen stärkern Niederschlag absetzt, wenn man sie zugleich kocht; wurde sie nicht gekocht, sondern von Neuem Essigsäure in genügender Menge hinzugeführt, so gerann sie auch dann vollständig; letzteres kann nur von dem eigenthümlichen Verhalten des nicht an Alkali gebundenen Caseins herrühren: denn das an Alkali gebundene löst sich im Ueberschuß der Säure sogleich wieder auf.

Durch die angeführten Versuche wird auch zugleich klar, wie unter gewissen Umständen die Essigsäure das Casein leichter, und unter andern wieder schwerer löst; es mag hier nur noch der Thatsache Erwähnung geschehen, daß concentrirte Essigsäure das getrocknete Casein wenig angreift, mag es dargestellt seyn, wie es will; die einzelnen Stücke werden durchscheinend und quellen auf; dasselbe gilt eben so vom coagulirten Eiweiß: Kalialbuminat wurde mit Essigsäure bis zur schwach säuern Reaction versetzt, so daß sich der Niederschlag eben wieder auflöste, und nun durch Alkohol gefällt und das gewonnene Eiweiß auf einem Filtrum ausgewaschen; noch feucht löste es sich leicht in concentrirter Essigsäure auf, getrocknet dagegen nicht.

Im Verlauf der gegenwärtigen Untersuchungen hat sich die Zahl der dem Albuminalkali und dem Caseinalkali gemeinsamen Eigenschaften um ein Bedeutendes vermehrt, bisher unbekannte Abweichungen treten aber nirgends auf, und es wäre wohl fraglich, ob man ehemals beide Substanzen mit verschiedene Namen belegt hätte, wenn man in Besitz dieser Thatsachen gewesen wäre. Trotzdem vermögen wir es doch noch nicht, die Identität beider zu behaupten, selbst wenn sie auch identisch wären. Dem

steht entgegen der bisher gefundene Unterschied im Schwefelgehalt und das Verhalten gegen die Schleimhaut des Magens. Auf Letzteres will man nicht mehr großes Gewicht legen, weil der dabei vorgehende Proceß ein völlig unbekannter ist, wie die Versuche von Selmi erst recht deutlich dargethan haben. Aber dennoch könnte gerade dieß ein wahrhaft wissenschaftliches Unterscheidungsmerkmal werden, wenn das Dunkel aufgeklärt würde. Die Frage muß daher unerledigt bleiben; für jetzt wäre nur noch festzustellen, welche Formen des Caseins dadurch zur Gerinnung gebracht werden. Auch der Werth der abweichenden Schwefelbestimmung ist problematisch, denn für die Reinheit und Integrität des Caseins giebt es keine genügende Bürgschaft.

Das Natronalbuminat des Blutes.

Das Natronalbuminat des Blutes gewinnt man durch Fällen des Serums mit ätherhaltigem Weingeist und durch Extraction des Niederschlages mit kochendem Wasser oder Spiritus; versetzt man letzteren mit Aether, bis die flockige Fällung entsteht und trocknet dieselbe, so erhält man das Natronalbuminat in der unlöslichen Form; seine Lösungen weichen von denen des schon beschriebenen nicht weiter ab, als daß die Flüssigkeit niemals klar zu erhalten ist, und die Reinheit der Substanz nicht erzielt werden kann, daher wir auf eine nähere Untersuchung Verzicht leisten müssen.

Das Globulinnatron der Krystalllinse.

Aus Krystallinsen erhält man durch Auflösen derselben in Wasser, Fällung der filtrirten Lösung mit Alkohol und Aether, Extraction dieses Niederschlages mit kochendem Weingeist und Fällung der klaren Flüssigkeit mit Aether eine Substanz, welche sich mit kochendem Wasser und Weingeist nicht mehr auflöst, sobald sie an der Luft getrocknet wird, während sie auch vorher alle Eigenschaften des Kalialbuminat zeigt. Dieselbe lieferte 1,44 Proc.

in Wasser fast ganz löslicher, stark alkalisch reagirender Asche. Möglicher Weise nehmen die Lösungen des Globulinnatrons einen bedeutenden Theil des durch die Wärme coagulirbaren Globulin in sich auf und könnte daher der geringe Alkaligehalt kommen. Das durch Kochen coagulierte und rein ausgewaschene Globulin hinterläßt bekanntlich keinen alkalisch reagirenden Aschenrückstand. Lehmann hat die vom geronnenen Globulin abfiltrirte Flüssigkeit eingedampft und viel kohlen-saures Alkali (16,71 Proc.) in der Asche gefunden, was er in der gesammten Krystall-linsenlösung nicht beobachtete. Er nimmt an, daß das Alkali nicht an das Globulin, sondern an irgend eine organische Säure, wahrscheinlich Milchsäure, gebunden sey. Nach den von mir angestellten Versuchen ist diese Hypothese wohl nicht mehr gestattet. Das getrocknete fein pulverisirte Globulinnatron konnte nämlich wiederholt mit Wasser gekocht werden, ohne Etwas vom Natron zu verlieren; milchsaures Alkali hätte dabei jedenfalls, wenn auch nur theilweise, entfernt werden müssen; indessen blieb sich die Quantität des Aschenrückstandes gleich, mochte die fein gepulverte Substanz mit kochendem Wasser behandelt seyn oder nicht.

Die vorstehenden Untersuchungen haben im Wesentlichen Folgendes ergeben. Durch Behandlung einer Eiweißlösung mittelst concentrirter Kalilauge entsteht ohne Anwendung der Wärme eine gallertartige, elastische Substanz, welche um so consistenter wird, je concentrirter man das Eiweiß anwendet; es ist ein Kalialbuminat, aus dem durch destillirtes Wasser, wenn auch nicht ohne Vermeidung von Verlust, das überschüssige freie Alkali entfernt werden kann. Die zurückbleibende Substanz löst sich in kochendem Wasser und Weingeist leicht auf. Aus den neutralen Lösungen lassen sich die Salze des Eiweißes in einem zur Analyse genügend reinen Zustande gewinnen. Das Verhalten gegen Reagentien und Lösungsmittel weicht von dem des löslichen Casein nicht ab. Vielmehr läßt

sich das Caseinalkali in einem analogen Zustande herstellen, wenn man seine weingeistige Lösung aus eben dem Organismus entlehnter Milch gewonnen, mit Aether fällt und den Niederschlag an der atmosphärischen Luft trocknet. Dasselbe gilt auch vom Natronalbuminat des Blutes und dem Globulinnatron der Krystalllinsen. Wie das Kalialbuminat beim Eindampfen auf dem Wasserbade durch beständige Zersetzung in die unlöslichen Häute von coagulirtem Eiweiß und in Kali zerfällt und der Rückstand fast unlöslich wird, so zerfällt auch die entsprechende Verbindung der Milch bei gleicher Behandlung in die unlöslichen Häute von coagulirtem Casein und in Alkali, und falls nicht ein besonderes Lösungsmittel im Rückstande vorhanden ist, löst sich in kochendem Wasser nur eine Spur von demselben auf. So ist es bei der ganz frischen Milch; später eingedampfte, wenn auch noch neutral reagirende, hinterläßt einen schwach sauren, anscheinend etwas mehr löslichen Rückstand, welcher in der weingeistigen oder wässrigen Auflösung dieselben Reactionen zeigt, wie das in den Lehrbüchern beschriebene lösliche Casein. Eben dieß gilt von einer Substanz, die man aus dem Kalialbuminat erhält, wenn man eine Auflösung desselben mit etwas Milchsäure oder Phosphorsäure versetzt, so zwar, daß der sich bildende Niederschlag wieder verschwindet, und nun eindampft und den schwach sauren Rückstand mit kochendem Wasser extrahirt. Das lösliche Casein in dieser Form ist daher ein Zersetzungsproduct und kommt als solches niemals im Organismus vor. In der Milch ist kein Eiweiß oder eine demselben analoge Form von freiem, durch Erwärmen gerinnenden, Casein nachweisbar; denn 1) die von Scherer entdeckte coagulirbare Substanz, welche sich dem Eiweiß gleich verhalten soll, gewinnt man nicht bloß, wenn frische Milch mit viel Milchsäure oder Essigsäure versetzt und das Filtrat erhitzt wird, sondern auch aus dem eben so dargestellten Filtrat der gekochten;

2) die gekochte und eingedampfte Milch liefert ebenso

wie die frische, bei 40° C. eingedampfte, bei der Extraction mit kaltem Wasser eine durch Kochen coagulirende Flüssigkeit;

3) daß das nach Quevenne dargestellte neutrale, beim Erhitzen gerinnende, Serum freies Albumin enthalte, läßt sich deshalb nicht behaupten, weil eben dem Organismus entnommene Milch, auf dem Wasserbade bei 100° C. eingedampft, und mit wenig kaltem Wasser extrahirt, gleichfalls eine neutrale coagulirbare Flüssigkeit liefert. Auch gerinnt das Kalialbuminat beim Kochen in seiner wässrigen Lösung, wenn man es zuvor mit Chlorcalcium oder Chlorbaryum versetzt. Demnach lehrt auch die Gerinnbarkeit einer neutralen Flüssigkeit Nichts über die Gegenwart von uncoagulirtem Eiweifs.

4) Die Milch liefert, nach Wurtz Methode behandelt, nicht einmal Spuren von löslichem Eiweifs. Die in der frischen Milch vorkommende stickstoffhaltige Substanz zeigt folgende Formen: die dem Kalialbuminat entsprechende, eine beim Erhitzen gerinnende, eine durch Filtration vom Serum trennbare.

Bei den bisherigen Untersuchungen sind meistens diese drei Formen zugleich in Angriff genommen worden. Ob Albumin und Casein identisch sind, dies zu entscheiden, fehlen noch genauere Schwefelbestimmungen des letzteren in seinen verschiedenen Formen und die Aufklärung des bei der Fällung durch die Magenschleimhaut vorgehenden Processes. Phosphor enthalten beide Körper nicht.

VI. Bemerkungen über das mechanische Aequivalent der Wärme; von A. F. Kupffer.

(Aus dem *Bulletin de la classe physico-math. de l'acad. de St. Petersb. T. X p. 193.*)

Wenn man einen an seinem oberen Ende befestigten senkrechten Draht an seinem unteren Ende mit einem Gewicht beschwert, so dehnt er sich um eine gewisse Gröfse aus. Man denke sich z. B. einen Draht, dessen Länge und Radius (ich setze voraus, dafs sein Querschnitt ein Kreis sey) der Einheit gleich sind, von der Gewichtseinheit ausgedehnt, und nenne die Ausdehnung, die er dadurch erleidet, δ ; wir wollen diese Gröfse die elastische Constante nennen.

Wenn man denselben Draht vom Frierpunkt des Wassers bis zu seinem Kochpunkt erhitzt, so erleidet er auch eine Ausdehnung, die wir mit a bezeichnen wollen.

Die Wärmemenge, die diese Ausdehnung hervorbringt, läfst sich nur vergleichungsweise bestimmen; man kann sich einen Wassercylinder denken, dessen Höhe und Radius bei 0° ebenfalls der Einheit gleich sind, und die Wärmemenge, die diesem Cylinder mitgetheilt werden mufs, um ihn von 0° bis 100° zu erwärmen, der Einheit gleich setzen. Alsdann ist

$m \cdot S$

die Wärmemenge, die dazu nöthig ist, um den oben genannten Draht von 0° bis 100° zu erhitzen; hier bedeutet m die spezifische Wärme des Metalls, aus dem der Draht gemacht ist, und S sein spezifisches Gewicht, auf Wasser bezogen.

Da nun die Ausdehnungen, die ein Draht erleidet, den angewandten Kräften proportional sind, so sieht man gleich, dafs die Werthe von a und δ uns eine Vergleichung der ausdehnenden Kraft der Wärme mit der dehnenden Kraft eines Gewichts darbieten, oder mit anderen Worten, dafs jene Werthe uns ein Mittel an die Hand geben, das me-

chanische Aequivalent der Wärme zu bestimmen. Man muß hier nicht vergessen, daß die Wärme gleichmäßig nach allen Seiten wirkt, wie ein Druck: nun hat aber Poisson gezeigt, daß ein Gewicht, welches einen Draht um δ ausdehnt, als nach allen Seiten gleichmäßiger Druck angewandt, eine lineare Ausdehnung von $\frac{1}{4}\delta$ hervorbringen würde. Wir haben also

$$\frac{2a}{\delta}$$

als das Verhältniß der mechanischen Wirkung der bezeichneten Wärmemenge zur mechanischen Wirkung eines Pfundes anzusehen. Um dieses Verhältniß in Zahlen auszudrücken, darf man nur für irgend eine Substanz die elastische Constante, den specifischen Wärmestoff und das specifische Gewicht, sowie auch ihre Ausdehnung durch die Wärme kennen.

In einer Abhandlung, die sich in den Denkschriften der St. Petersburger Academie der Wissenschaften ¹⁾ abgedruckt findet, habe ich die elastischen Constanten mehrerer Metalle bestimmt, aus der Schwingungsdauer 10 Fufs langer und eine Linie dicker Drähte, die an ihrem oberen Ende befestigt waren, an ihrem unteren aber einen mit Gewichten beschwerten horizontalen Hebel trugen, dessen Trägheitsmoment bekannt war. Diese Methode, die eine große Genauigkeit zuläßt, gab mir folgende elastische Constanten (δ), denen ich die specifischen Gewichte (S) der angewandten Drähte hinzufüge:

	δ .	S .
Eisendraht	0,00000001110	7,5536
Messingdraht	2139	8,4760
Platindraht	1269	20,9624
Silberdraht	2854	10,4845.

Dieselben Metalle haben folgende specifische Wärmestoffe (m) und Ausdehnungen durch die Wärme (a):

1) *Mémoires VI. Série Sc. math. et phys. T. V. p. 233 bis 302.*

	specifische Wärmestoffe <i>m.</i>	Ausdehnung von 0° bis 100° C. <i>a.</i>
Eisen	0,11379	0,001182
Messing	0,09391	0,001878
Platin	0,03243	0,0008842
Silber	0,05701	0,001910.

Alle diese Werthe müssen der Gleichung

$$c.m.S.\frac{1}{2}\delta = a,$$

entsprechen, in welcher *c* eben das mechanische Aequivalent der Wärme bedeutet, welche dazu nöthig ist, um die Temperatur des oft bezeichneten Cylinders von Wasser vom Frierpunkt bis zum Kochpunkt zu erheben; oder den Druck, in Pfunden ausgedrückt, den diese Wärmemenge ausübt.

Setzt man die obigen Werthe in die obige Gleichung, so erhält man:

$$\text{für den Eisendraht} \quad c = 247800$$

$$\text{für den Messingdraht} \quad c = 220600$$

$$\text{für den Platindraht} \quad c = 205050$$

$$\text{für den Silberdraht} \quad c = 223900$$

$$\text{Mittel} \quad c = 224325$$

$$\text{dessen log} = 5,35088.$$

Wenn man mit diesem Werthe von *c* die Ausdehnungen der Metalle durch die Wärme berechnet, so erhält man

	<i>a</i> berechnet.	<i>a</i> beobachtet.
für Eisen	0,001070	0,001182
für Messing	0,001909	0,001878
für Platin	0,000968	0,000854
für Silber	0,001918	0,001910.

Eine genauere Uebereinstimmung war nicht zu erwarten, bei Gröfsen, die von so verschiedenen Beobachtern und an so verschiedenen Individuen bestimmt worden sind, und auf welche der jedesmalige durch ihre Bearbeitung herbeigeführte Zustand der Metalle einen gewifs nicht unbedeutenden Einfluss ausübt. Ich bin eben damit beschäftigt, zwei der in Frage stehenden Gröfsen, nämlich erst die

elastische Constante und dann die Ausdehnung durch die Wärme, an denselben Drähten zu bestimmen, und hoffe dann erst zu genaueren Resultaten zu gelangen.

Der Druck von 224325 rufsischen Pfunden wirkt auf die Oberfläche von π Quadratzollen, man hat also für 1 Quadratzoll

71441 Pfund

oder mehr als 4327 Atmosphären.

Das mechanische Aequivalent der Wärme kann auch auf eine andere Art ausgedrückt werden.

Der oben angeführte Metalleylinder wird durch die Schwerkraft eines Pfundes um die Gröfse δ ausgedehnt; das Gewicht $p = \frac{1}{\delta}$ würde ihn also um 1 Zoll verlängern; man kann also die elastische Kraft des Cylinders damit bezeichnen, dafs man sagt, sie hebe das Gewicht p um 1 Zoll in die Höhe; denn sie hält der Kraft p , die um 1 Zoll herabgesunken ist, das Gleichgewicht.

Erhitzt man denselben Cylinder um 100° C. , so dehnt er sich um die Gröfse a aus: nach der obigen Hypothese würde er sich um die Gröfse $2a$ ausdehnen, wenn die Wärme nur in einer Richtung wirkte, wie das Gewicht p ; die Wärmemenge, die diese Ausdehnung hervorbringt, ist $w.mS$, wenn wir die Wärmemenge, die dazu gehört, um einen Cylinder Wasser von einer Höhe = Radius = 1 vom Frierpunkt bis zum Kochpunkt zu erhitzen, mit w bezeichnen.

Hieraus folgt, dafs

$$\frac{w.mS}{2a}$$

die Wärmemenge ist, die eine Ausdehnung von 1 Zoll hervorbringen würde; oder da die Kräfte, die gleiche Wirkung hervorbringen, gleich seyn müssen, so ist

$$p = \frac{w.mS}{2a}.$$

Wir haben aber auch

$$p = \frac{1}{\delta} \text{ und } \frac{m s \delta}{2a} = c, \text{ also } w = c.$$

Die Menge Wärme, die dazu nöthig ist, um einen Wassercylinder, dessen Höhe = Radius = 1 ist, vom Frierpunkt bis zum Kochpunkt zu erhitzen, ist also fähig 221325 russische Pfunde auf 1 Zoll Höhe zu heben.

Ein Wassercylinder, dessen Höhe = Radius = 1 ist, wiegt 0,1134 eines englischen Pfundes (bei der Temperatur der größten Dichtigkeit); die Anzahl der Fahrenheit'schen Grade, die zwischen dem Frier- und Kochpunkt enthalten sind, ist 180, und 1 rufsiches Pfund = 0,9028 des engl. Pfundes; man hat also

$$\frac{c \cdot 0,9028}{0,1134 \cdot 180} = 9921$$

für die Anzahl engl. Pfunde, welche die Wärme, welche dazu nöthig ist, um 1 engl. Pfund Wasser vom Frierpunkt bis zum Kochpunkt zu erhitzen, auf die Höhe von 1 Zoll zu erheben im Stande ist.

Joule fand durch Versuche über die Wärme, die durch Reibung entsteht

10680.

Durch Versuche über die Wärme, die bei Compression der Luft entwickelt wird, fand er

9876 und 9540.

Alle diese Zahlen weichen nicht sehr von einander ab.

Aus dem Verhältniß des Meters zum englischen oder rufsichen Zoll, und des Kilogramms zum rufsichen Pfund findet man leicht, dafs die Wärme, die dazu nöthig ist, um 1 Kilogramm Wasser von 0° bis 1° zu erwärmen, eine Kraft ausübt, welche hinreichend ist, um 453 Kilogramm auf die Höhe von 1^m zu heben.

VII. *Ueber die Systeme, in welchen die rechts- und linkskreisenden Schwingungen nicht in gleicher Weise geschehen; von Hrn. A. Bravais.*

(*Compt. rend. T. XXXII. p. 166.*)

Die so merkwürdige Drehung der Schwingungsebene eines Pendels, welche neuerlich Hr. Foucault entdeckt hat, bietet mit der Drehungs-Bewegung der Polarisationssebene eines längs der Axe eines Quarzkrystalls fortgehenden homogenen Lichtstrahls eine Aehnlichkeit dar, die mir der Beachtung der Physiker würdig zu seyn scheint. Das Drehungs-Phänomen des Quarzes hatte bisher unter den wohl bestimmten natürlichen Bewegungen nicht sein Analogon; aber es findet es in dem schönen Versuch des Hrn. Foucault.

Die einzige Verschiedenheit besteht darin, daß beim Quarz, zufolge der Wellentheorie, jedes in der Axe des Strahles liegende Aethermolecul seine, successive abgeänderte Bewegung dem, im Sinne der Fortpflanzung auf ihn folgenden Molecule mittheilt, um darauf in den Ruhestand zurückzukehren, bis eine neue Erschütterung es wieder herausreißt, — während beim Pendel die schwingende Masse als isolirt, fortdauernd Ort und Stelle schwingt, ohne ihre Verschiebung auf benachbarte Massen zu übertragen.

Ich will nun den Fall untersuchen, wo die Schwingung kreisförmig wird. Fresnel hat gezeigt, daß eine kreisförmige Schwingung als äquivalent zweien geradlinigen Schwingungen von gleicher Amplitude und einem Phasenunterschied von 90° betrachtet werden kann. Davon ausgehend, hat er nachgewiesen, daß wenn die Ebene jeder der beiden componirenden Schwingungen sich mit einer gewissen gemeinschaftlichen Geschwindigkeit dreht, die Fortpflanzung der entsprechenden Kreisbewegung abgeändert wird, in plus oder minus, je nach dem die Schwingungen eine rechts- oder linkskreisende (*dextrogyre* ou

lévogyre) ist. Daraus schloß er dann, daß der Quarz diese beiden Schwingungsarten nicht mit gleicher Geschwindigkeit fortpflanzen könne, was er auch durch directe Versuche bestätigte.

Dieselbe Schlußfolgerung auf lineare und sehr kleine Schwingungen eines Pendels angewandt, sieht man, daß, wenn die Schwingung kreisförmig wird, wie es bei dem konischen Pendel statthat, die Dauer derselben nicht gleich seyn kann, falls sie im Sinne der Drehung der Ebene der geradlinigen Schwingungen, d. h. von Ost nach West, oder im umgekehrten Sinne geschieht. Im ersten Falle wird sie verkürzt, im zweiten verlängert, welcher Ursache man übrigens auch die, von Hrn. Foucault beobachtete, Verschiebung der Schwingungsebene zuzuschreiben genöthigt seyn möge. Man hat also an der Dauer der kreisförmigen Pendelschwingungen eine Berichtigung anzubringen, deren Zeichen verschieden ist nach dem Sinn, in welchem dieselben vor sich gehen.

Zu demselben Resultat gelangt man, wenn man *a priori* discutirt, welchen Effect die Rotationsbewegung der Erde auf die Dauer der kreisförmigen Pendelschwingungen ausübe.

Ist t die Dauer der *vollständigen* linearen Schwingung eines Pendels (zwei Sekunden, im Fall eines Sekundenpendels) und T die Dauer eines Sterntages so wird der Drehungswinkel der Erde, in der Zeit t , am Pol: $2\pi \frac{t}{T}$, und unter der Breite λ : $2\pi \frac{t}{T} \sin \lambda$.

Wenn nun dasselbe Pendel kreisförmig schwingt, wird seine scheinbare Drehung in der Zeit t , wenn dieselbe von Osten nach Westen geschieht:

$$2\pi + 2\pi \frac{t}{T} \sin \lambda,$$

und wenn sie von Westen nach Osten vor sich geht:

$$2\pi - 2\pi \frac{t}{T} \sin \lambda.$$

Die nach Verlauf der Zeit T durch die Rotation der Erde bewirkte Winkeländerung wird also seyn: $\pm 2\pi \sin \lambda$. Der Phasenunterschied zwischen den beiden Bewegungen, links- und rechtsherum, ist folglich, nach 24 Stunden Sternzeit, gleich dem Product zweier vollständigen Schwingungen in den Sinus der Breite. Daraus folgt, dafs das konische Sekundenpendel, wenn es sich von Osten nach Westen dreht, zu Paris täglich um etwa drei Sekunden schneller geht als wenn es sich von Westen nach Osten dreht, eine Gröfse, welche die von den Astronomen als zu vernachlässigend betrachteten bedeutend übertrifft.

Dieser Unterschied würde bei sehr langen Pendeln noch beträchtlicher seyn; bei dem Pendel, von 11 Metern, welches Hr. Foucault jetzt auf der Pariser Sternwarte herstellt, würde er sich wenigstens auf täglich zehn Sekunden belaufen.

Man begreift, dafs es vielleicht möglich wäre, diese Ungleichheit direct zu beweisen, wenn es gelänge, gleichzeitig, aber im entgegengesetzten Sinn, zwei isochrone Pendel schwingen zu lassen, so dafs man ihre Coincidenzen auf einem und demselben Durchmesser beobachten könnte; denn die Drehung dieses Durchmessers mufs dieselbe seyn wie die der Schwingungsebene eines geradlinig schwingenden Pendels.

Die Schwingungen stets als sehr klein vorausgesetzt, ist es erlaubt, auf die elliptischen Schwingungen anzuwenden, was oben von den kreisförmigen gesagt worden, und auch den Effect des Widerstandes der Luft zu vernachlässigen; allein in der Praxis könnte es nöthig seyn, sowohl darauf, wie auf die Winkel-Amplitude der Schwingungen Rücksicht zu nehmen.

Nach obigen Bemerkungen steht zu hoffen, dafs die Eigenschaft gewisser Substanzen, namentlich der unter elektro-magnetischem Einfluß stehenden, die Polarisations-ebene des Lichts zu drehen und die rechts- und linkskreisenden Ätherschwingungen mit ungleicher Geschwindigkeit fortzupflanzen, eine vollständigere Erklärung finden werde.

VIII. *Ueber den Einfluss der Rotation der Erde auf die Bewegung eines konisch schwingenden Pendels; von Hrn. A. Bravais.*

(*Compt. rend. T. XXXIII. p. 195.*)

Am 10. Febr. 1851 (d. h. in der vorhergehenden Notiz) hatte ich die Ehre, der Akademie zu melden, dass mir die ungleiche Dauer der rechts- und linkskreisenden konischen Pendelschwingungen eine nothwendige Folge von Hrn. Foucault's schönem Versuch über die Abweichung der Schwingungsebene zu seyn scheine.

Da Hr. Arago die Güte hatte, den grossen Meridian-Saal der Sternwarte zu meiner Verfügung zu stellen, so konnte ich an einem 10 Meter langen Pendel die zur Prüfung dieses Satzes erforderlichen Versuche machen, und dadurch nicht allein den von der Theorie vorausgesehenen Effect bestätigen, sondern auch mit einem Grade von Genauigkeit messen, den ich vorher nicht erwartet hatte.

Ich wandte zweierlei Methoden an, die der directen Beobachtung und die der Coïncidenzen. Bei der directen Methode beobachtete ich die Dauer von 900 bis 1200 links-herum (von West durch Süd nach Ost) gehenden Pendelschwingungen, und gleich darauf die Dauer von eben so vielen rechtskreisenden Schwingungen desselben Pendels. Der Abstand des Aufhängepunkts vom Mittelpunkte des Gewichts ging von 10187 bis 10197 Millimeter. Die beobachtete Dauer war folgende.

1851.	Linksherum.	Rechtsherum.	Unterschied.
5 Mai	6",39887	6",39823	0",00064
11 Mai	6,39925	6,39849	0,00076
16 Mai, Faden A	6,39815	6,39751	0,00064
18 Mai, Faden A	6,39959	6,39863	0,00096
16 Mai, Faden B	6,40106	6,40032	0,00074
18 Mai, Faden B	6,40116	6,40044	0,00072
Mittlerer Unterschied			0",00074

Da die Theorie den Unterschied zu $0'',000716$ ergibt, so kann die Uebereinstimmung als genügend betrachtet werden.

Die zweite Methode bietet eine weit größere Genauigkeit dar. Zwei ähnliche, aber an Länge etwas verschiedene Pendel wurden, in der Ebene des Meridians, 7 Decimeter von einander entfernt aufgehängt. Der Abstand des Aufhängepunkts vom Mittelpunkt des Gewichts betrug beim längern Pendel 10216 Millimeter und beim kürzeren 10115. Die konischen Rotationen, bei dem einen rechtsherum, bei dem andern linksherum, wurden beiden Pendeln gleichzeitig eingeprägt und man beobachtete die gleichzeitigen Durchgänge ihrer Fäden durch den Meridian mittelst eines Fernrohrs, dessen optische Axe die beiden Fäden bei Ruhe durchschnitt. Die zwischen zwei successiven Coïncidenzen vollbrachten Schwingungsmengen n , n' der beiden Pendel wurden aufgezeichnet; so hatte man $n' = n + 1$, wo n' sich auf das kürzere Pendel bezieht.

Nach beendeter Reihe hielt man die Pendel an und setzte sie im umgekehrten Sinn in Bewegung, beobachtete abermals die Coïncidenzen und bestimmte wiederum die beiden Zahlen N und $N' = N + 1$.

Nennt man λ die geographische Breite, T die Dauer eines Sterntages, t die Dauer der konischen Schwingung des längern Pendels, befreit von dem Effect der Rotation der Erde, t' dieselbe Dauer für das kürzere Pendel, so muß man, falls die Theorie richtig ist, finden.

$$\frac{\sin \lambda}{T} = \frac{1}{t+t'} \left\{ \frac{1}{n+n'} - \frac{1}{N+N'} \right\}.$$

Der Versuch vom 25. Mai giebt:

$$\begin{array}{ll} n = 207,86 & N = 217,82 \\ n' = 208,86 & N' = 218,82. \end{array}$$

Der Versuch vom 10 Juni

$$\begin{array}{ll} n = 206,31 & N = 215,96 \\ n' = 207,31 & N' = 216,96. \end{array}$$

Aus diesen Zahlen kann man auch den Unterschied in der Dauer zwischen den links- und rechtskreisenden Schwin-

gungen ableiten, und man findet nach Anbringung der nöthigen Berichtigungen:

Unterschied am 25. Mai . . . 0",000725

„ „ 10. Juni . . . 0,000710.

Ich wollte wissen, ob die Gegenwart von Eisen einigen Einfluss auf das Phänomen ausübe, und schloß daher das Quecksilber eines meiner Kupfercylinder in einen 900 Grm. wiegenden Eisencylinder ein. Nun wurde für den Unterschied beider Schwingungsarten erhalten:

0",000702.

Der Einfluss des Eisens auf das Phänomen kann also fast als Null betrachtet werden.

Aus der Gesamtheit meiner Betrachtungen schliesse ich, daß bei Pendeln von 10 Meter Länge, wenn sie sich konisch von Westen nach Osten drehen, die Winkelgeschwindigkeit zu Paris um 11",4 pro Zeitsekunde vergrößert, dagegen um dieselbe GröÙe vergrößert wird, wenn die Drehung von Osten nach Westen geschieht.

Man kann aus diesen Beobachtungen die Länge des einfachen Sekundenpendels ableiten, sobald man folgende Berichtigungen in Rechnung nimmt:

- 1) Den Effect der Temperatur.
- 2) Den Gewichtsverlust durch die Luft, dabei, nach Dubuat, Bessel und Poisson, Rücksicht genommen auf den Bewegungszustand dieses Fluidums.
- 3) Die Senkung des Oscillationscentrums unter den Schwerpunkt.
- 4) Den täglichen Gang des Chronometers oder der Pendeluhr.
- 5) Den Effect, welchen das Gewicht des Aufhängefadens ausübt, um das Oscillationscentrum zu heben, einen Effect, der sich in meinen Versuchen auf 10^{mm},6 beläuft.
- 6) Endlich die Beugung des Fadens zur Form einer Kettenlinie durch gleichzeitige Wirkung seines Gewichts und der Centrifugalkraft. Daraus folgt, daß die niedrigste Tangente des Fadens, verlängert bis zur Rotationsaxe, diese, unterhalb des Befestigungspunktes, in einem Punkte schnei-

det, welcher als das wahrhafte Centrum der oberen Aufhängung des Fadens betrachtet werden muß. Ich finde durch Rechnung, daß daraus für die Länge des Fadens eine subtractive Correction hervorgeht, die der vorherigen fast gleich ist und bei meinen Versuchen auf $10^{\text{mm}},5$ steigt.

Nach diesen Berichtigungen finde ich die Länge des einfachen Sekundenpendels zu Paris $= 993^{\text{mm}},77$, welche von der angenommenen, $993^{\text{mm}},86$ wenig abweicht.

Es ist wichtig zu bemerken, daß die Berichtigung wegen der Biegung des Fadens, meines Wissens, niemals bei den ebenen Schwingungen der an Fäden hängenden Pendel, z. B. dem 1792 von Borda benutzten, angebracht ist; und doch scheint diese Berichtigung bei den linearen Pendelschwingungen nicht weniger angebracht werden zu müssen als bei den konischen. Da der Werth dieser Berichtigung sehr merklich seyn kann, so verdient dieser Gegenstand wohl die Aufmerksamkeit der Rechner und der experimentirenden Physiker.

IX. *Ueber die durch comprimirtes Glas bewirkte chromatische Polarisation;*
von Hrn. W. Wertheim.

(Compt. rend. T. XXXII. p. 289. Ein Auszug aus der Abhandlung.)

Die Hauptaufgabe, welche ich zu lösen gesucht habe, ist die: Ist das Doppelbrechungs-Vermögen, welches bei verschiedenen Krystallen so ungleich ist, daß es für gleiche Dicken vom Einfachen bis zum 18fachen und darüber geht, wirklich der Substanz dieser Krystalle inwohnend, oder entspringt es daraus, daß die Molecular-Tensionen in den einen größer sind als in den anderen? Oder anders gesagt: Wenn man verschiedene homogene Körper in gleichen Richtungen comprimirt oder dilatirt, würden

dieselben ein gleiches oder ein verschiedenes Brechungsvermögen erlangen?

Um diese Frage mittelst der Compression zu beantworten, müßte man bei jeder der untersuchten Substanzen bestimmen können: die Condensation in Richtung der Compression, die Dilatation in der darauf senkrechten Richtung und die daraus entspringende Doppelbrechung.

Fresnel und Brewster haben Glaswürfel comprimirt und Letzterer scheint merkliche Farben erlangt zu haben; allein der Druck war nicht gleichmäÙig vertheilt auf dem ganzen Querschnitt des Würfels und überdiß wurden die comprimirende Kraft und die durch sie bewirkte Compression nicht gemessen, so daß dieselben nichts als die Möglichkeit einer künstlichen Hervorbringung der Doppelbrechung darthaten.

Mit meinem Apparate dagegen, angewandt auf Körper, deren Elasticitätscoefficient zuvor bestimmt worden, findet man die Zahlenwerthe aller Elemente des Problems. Der Druck wirkt auf den ganzen Horizontalschnitt des Körpers, und so kann man für jeden Augenblick die lothrechte Compression berechnen. Daraus leitet man sogleich die horizontale Dilatation ab, nach dem Gesetz der Volumsänderungen, das ich glaube in einer früheren Abhandlung festgestellt zu haben ¹⁾. Es bleibt also nur noch die Doppelbrechung oder den Gangunterschied zwischen dem ordentlichen und außerordentlichen Strahl zu messen übrig.

Diese optischen Effecte stimmen ganz mit der Theorie überein. Mit homogenem gelbem Lichte beobachtet man in jedem Bilde abwechselnd ein Maximum der Helligkeit und fast vollständige Auslöschung, mit allen Zwischenstufen. Ich trieb den Versuch bis zu einer Belastung von 600 Kilogramm und bis zu Gangunterschieden von fünf Halbwellen.

Bei weißem Lichte und bei Anwendung wohl auserlesener Gläser sieht man in den beiden Bildern Complementaryfarben verschiedener Ordnungen, die in der ganzen Ausdehnung des Gesichtsfeldes recht gleichförmig sind, und

1) Vergl. Ann. Bd. 78, S. 381 und 476.

sowie man den Druck vermehrt, immer lebhafter werden und in der Reihe der prismatischen Farben hinabsteigen. Sie sind von einer solchen Reinheit, daß eine Vermehrung von 2 Kilogramm auf 500 sich noch durch eine Farbenänderung ausspricht, besonders wenn man sich in der Nähe der sensiblen Farbe befindet. Da der Unterschied der durchlaufenen Wege bekannt ist, so kann man die einer jeden Belastung entsprechenden Farbennüancen (*teintes colorées*) nach der Newton'schen Regel bestimmen.

Innerhalb der Gränzen meiner Versuche sind die Gangunterschiede den Belastungen proportional.

Folgendes sind die Resultate einer großen Reihe von Versuchen mit homogenem gelbem Lichte und mit mehreren Stücken einer jeden Glassorte von verschiedener Größe.

	Specif. Gewicht.	Elastici- tätscoëf- ficient q .	p .	Verticale Compress. $\frac{p}{q} = \delta$	Horizon- tale Dila- tation. $\frac{\delta}{3}$	Verhält- niß der beiden Dichten $\frac{1 + \frac{1}{3}\delta}{1 + \delta}$
Kronglas	2,447	7000	12,1	0,00173	0,000577	1,00231
Spiegelglas	2,457	6100	10,7	0,00175	0,000583	1,00234
Flintglas	2,585	5500	9,5	0,00173	0,000577	1,00231
Schweres Gui- nard'sches Glas	4,054		14,9			

In dieser Tafel ist p die Belastung, die, wenn sie auf einen Würfel von 1 Millimeter in Seite angewandt wäre, einen Gangunterschied von $\frac{1}{2}d = 225$ Millionteln eines Millimeters hervorbringen würde. Um den Werth von p zu finden, brauchten wir nur die absolute Belastung zu dividiren durch die Breite des dem Versuche unterworfenen Stücks; denn sie ist offenbar unabhängig von der Höhe dieses Stücks und auch von der Länge desselben, weil die Condensationen umgekehrt proportional dieser Länge sind, während die Gangunterschiede ihnen direct proportional gehen.

Aus diesen Versuchen geht hervor, daß Kron-, Spiegel- (*verre à glaces*) und Flintglas, ungeachtet der Ver-

schiedenheit ihrer Zusammensetzung und Dichtigkeit, eine gleiche specifische Doppelbrechung besitzen; *man muß also diesen Gläsern eine gleiche lineare Compression ertheilen, damit sie ein gleiches absolutes Doppelbrechungs-Vermögen erlangen.*

Was das schwere Glas betrifft, so ist dessen Elasticitäts-Coëfficient noch unbekannt; es kann also nicht zur Bestätigung dieses Gesetzes dienen. Bei gleicher Belastung ist sein absolutes Doppelbrechungs-Vermögen nur 0,638 von dem des Flintglases; aber da sein specifisches Doppelbrechungs-Vermögen sehr wahrscheinlich dem der anderen Glassorten gleich ist, so muß sein Elasticitätscoëfficient 8620 seyn und folglich höher als der der übrigen Gläser.

Wenn sich dieses Gesetz allgemein bestätigt, so wird man sich der Doppelbrechung bedienen können, um, bei sehr kleinen Massen, den Elasticitätscoëfficienten durchsichtiger unkrystallisirter oder tesseral krystallisirter Substanzen zu bestimmen. Durch Combination dieser Untersuchung mit der directen Messung des Elasticitätscoëfficienten gelangt man auch zur Bestimmung der Condensationen und Dilatationen, welche in den doppeltbrechenden Krystallen vorhanden sind, und ich glaube bald im Stande zu seyn, diese Arbeit zu unternehmen.

Es bleibt mir noch übrig, von der gleichzeitigen Wirkung der Compression und der Magnetisirung zu sprechen, mit der sich Hr. Matteucci schon vor mir beschäftigt hat¹⁾. Zu diesen Versuchen ersetzte ich die bewegliche Stahlplatte und ihre eisernen Halter durch eine Bronzeplatte von gleichen Dimensionen, versehen mit zwei Messingstäben; auf diese Weise befreit man sich von der Anziehung, die der Elektromagnet auf die Stahlplatte ausübt und deren verticale Componente wenigstens 30 Kilogrm. gleich ist, so weit sich aus der Farbenänderung schliessen läßt, die sie in dem dazwischen gelegten Glase hervorbringt.

Nachdem dieser secundäre Effect so eliminirt ist, sieht

1) *Ann. de chim. et de phys. Ser. III. T. XXVIII. p. 493.*

man, daß die magnetische Drehung verschwindet in dem Maasse als der Druck zunimmt. In Flintgläsern, die mit einer Säule von 16 grofsen Elementen, von denen jedes 2 Bunsen'schen Elementen gleich kommt, eine Doppel-Drehung von 10 Grad giebt, verschwindet die Drehung, sobald der Gangunterschied etwas merklich wird und lange bevor er einer Welle gleich kommt. Auf eine recht entscheidende Weise läfst sich der Versuch anstellen, wenn man mit homogenem Lichte operirt und den beiden Strahlen einen Gangunterschied von einer halben Welle giebt; man hat dann ein vollkommen dunkles Bild, in welchem man die geringste Spur von Drehung beobachten würde, sobald sie existirte. Dasselbe Resultat erhält man, bei Anwendung von weifsem Lichte, mittelst der sensiblen Farbe.

Dieses negative Resultat scheint mir nicht unwichtig zu seyn, denn es scheint mir anzudeuten, daß die Drehung die beim Kalkspath Null, beim Quarz sehr schwach und beim Beryll sehr deutlich ist, den in diesen Krystallen immer weniger grofsen Spannungsunterschieden zugeschrieben werden mufs. Ausserdem scheint mir dadurch erwiesen, daß diese Drehung, die sich durch eine rein mechanische Kraft zerstören läfst, nicht der directen Wirkung des Magnets auf den Aether zugeschrieben werden kann, sondern von einer unbekannten Wirkung desselben auf die Substanzen herzuleiten ist.

X. *Ueber die in Krystallen des regulären Systems künstlich erzeugte Doppelbrechung;*
von Hrn. W. Wertheim.

(*Compt. rend. T. XXXIII. p. 576.*)

In der Sitzung vom 25. Febr. hatte ich die Ehre, in der Academie eine Notiz¹⁾ zu lesen über die Resultate meines

1) Die vorhergehende.

Studiums der in homogenen, unkrystallisirten Körpern, wie Glas, künstlich hervorgebrachten Doppelbrechung. Ich habe darin einige Gesetze aufgestellt, an die ich zum Verständnifs meiner neuen Untersuchungen glaube erinnern zu müssen.

Wirkt die Compression winkelrecht auf die beiden gegenüberliegenden Flächen eines Parallelepiped, so sind die neutralen Axen parallel und winkelrecht gegen die Richtung der Kraft; in allen übrigen Richtungen übt das Parallelepiped eine doppeltbrechende Wirkung aus. Die Farben der beiden Bilder sind am lebhaftesten, wenn die Ebene der ursprünglichen Polarisation und der Hauptschnitt des zerlegenden Prismas einen Winkel von 45° mit der Richtung der Kraft bilden.

Der Gangunterschied zwischen den beiden Strahlen, dem ordentlichen und außerordentlichen, ist proportional der ausgeübten Kraft, unabhängig von der Länge und Höhe, und umgekehrt proportional der Breite des Stücks.

Man erhält daher immer denselben Gangunterschied, auf welche Flächen auch die Kraft wirken möge, sobald man Gewichte anwendet, die den entsprechenden Breiten proportional sind.

Endlich sind, bei verschiedenen Glassorten, die Belastungen, welche einen gleichen Gangunterschied hervorbringen, proportional den Elasticitätscoëfficienten derselben.

Seit der Zeit habe ich eine große Zahl von Versuchen gemacht, sowohl mit Gläsern als mit zum regulären System gehörenden Krystallen, die sich, nach der allgemein angenommenen Theorie, wie unkrystallisirte Körper verhalten müssen.

Um besonders den letzten der angeführten Sätze zu verificiren, bestimmte ich für jede Substanz sowohl ihren Elasticitätscoëfficienten durch die akustischen Mittel, als auch die künstliche Doppelbrechung durch das angeführte experimentelle Verfahren.

Bei Krystallen des regulären Systems hält es indess

schwer, diese letztere Bestimmung mit Genauigkeit zu machen, wegen der Complication, die aus denjenigen Erscheinungen entspringt, welche Hr. Biot *Lamellar-Polarisation* genannt, und mit so vieler Sorgfalt studirt hat. Die aus dieser letzteren Ursache entspringende Färbung kann sich, je nach der Lage des Stücks, der von der Compression bewirkten addiren oder von ihr subtrahiren, und daher ist man genöthigt sie in Rechnung zu ziehen und zu eliminiren. Es sind nicht allein die meisten dieser Krystalle mit der Lamellar-Polarisation begabt, sondern sogar diejenigen, welche dieselbe nicht zu besitzen scheinen, erlangen sie in permanenter Weise in Folge der Zusammendrückung; ich habe mich davon durch Versuche mit Steinsalz überzeugt. Diefs gereicht offenbar der Theorie des Hrn. Biot zur Stütze. Der mechanische Druck sucht die Lamellen, aus welchen der Krystall besteht, von einander zu entfernen, und Zwischenräume zu schaffen, welche, obgleich dem Auge unsichtbar, sich doch durch die Wirkung des polarisirten Lichts verrathen. Auch werden diese Phänomene immer lebhafter in dem Maasse als man den Druck verstärkt, und sie erreichen ihr Maximum der Intensität in dem Moment, wo der Krystall anfängt nach seinen Spaltbarkeitsebenen aufzublättern. Man sieht hieraus, wie wünschenswerth es war, sich von dieser Complication zu befreien. Ich bin so glücklich gewesen, im Handel eine Sorte Alaun anzutreffen, die, selbst nachdem sie einem Drucke von mehr als einem Kilogramm auf das Quadratmillimeter ausgesetzt worden, und obwohl sie Ammoniak enthält, keine Spur davon zeigt. Dieser, sehr weisse und die Politur vollkommen behaltende Alaun hat mir folgende merkwürdige Erscheinung gezeigt.

Ich brachte einen Würfel dieses Alauns unter die Gewichtspresse, stellte die Hauptschnitte des Nicols und des Zerlegers unter 45° und liefs Belastungen wirken, die hinreichend waren, um Gangunterschiede von $\frac{1}{4}\lambda$, $\frac{1}{2}\lambda$, etc. hervorzurufen. In weissem Lichte hätte man an beiden Bildern dieselben lebhaften Farben sehen müssen, welche

beim comprimierten Glase erscheinen; aber dem ist nicht also. Die Bilder sind fast weiß, zeigen nur eine schwache Spur von Färbung. Ebenso müßte, wenn man die beiden Prismen auf 0° zurückdreht, das ordentliche Bild, bei je gleicher Belastung, ausgelöscht seyn, allein in Wirklichkeit bleibt es beständig hell.

Wendet man homogenes Licht an, so entdeckt man leicht die Ursache dieser scheinbaren Anomalie; sie entspringt daraus, daß die *optischen Axen nicht mit den mechanischen zusammenfallen, sondern mit diesen einen Winkel bilden*, welcher sich in Größe und Richtung ändert, je nachdem man die mechanische Kraft auf das eine oder andere Paar der Würfelflächen wirken läßt. Dieser Winkel ändert sich nicht mit der Belastung; er bleibt für jeglichen Gangunterschied zwischen beiden Strahlen derselbe und diese Verschiebung rührt nicht von einer Drehung der Polarisationssebene her, denn, um die neutrale Axe wieder zu finden und das ordentliche Bild verlöschen zu sehen, reicht es nicht hin das zerlegende Prisma zu drehen, sondern man muß auch die Polarisationssebene verrücken.

Zum besseren Verständniß dieser Thatsachen, will ich von einigen mit homogenem gelbem Lichte gemachten Versuchen das Detail angeben. Bezeichnen wir die drei Flächenpaare des Alaun-Parallelepipeds mit a , b und c , die Dicken sind folgende: $aa=14^{\text{mm}},9$; $bb=17^{\text{mm}},3$; $cc=17^{\text{mm}},7$:

Höhe.	Breite.	Länge.	Verschiebung		Belastung	
			Größe.	Richtung.	entsprechend einem Gang- unterschied $=\frac{1}{2}\lambda$.	auf das Millimeter Breite.
					Kilogramm.	Kilogramm.
aa	bb	cc	18 ^o	links	212	12,2
	cc	bb	12	rechts	210	11,9
bb	aa	cc	15	rechts	130	8,7
	cc	aa	7	links	172	9,7
cc	aa	bb	7	rechts	100	6,7
	bb	aa	8	rechts	120	6,9

Die Zahlen in der letzten Spalte zeigen, daß die Belastungen, welche einen gleichen Gangunterschied hervorbringen, immer den Breiten proportional sind, aber sehr bedeutend mit der Richtung variiren, in denen sie den Krystall zusammendrücken¹⁾. Da man nun nicht annehmen kann, daß der Elasticitätscoefficient, in allen Richtungen gleich sey, so ist man zu der Annahme gezwungen, daß die Spannung des Aethers nicht immer proportional gehe der mechanischen Spannung der Molecule.

Die im weissen Licht beobachteten Thatsachen sind nun begreiflich. Man erhält keine Auslöschung des ordentlichen Bildes, weil die Winkel der Verschiebung nicht gleich sind für die Strahlen von verschiedener Brechbarkeit. Um die lebhaftesten Farben zu erhalten, müssen die Hauptschnitte beider Prismen immer einen Winkel von 45° mit der neutralen Axe bilden. Wenn also diese Axe z. B. 18° nach der Rechten verschoben ist, müssen die Prismen 63° rechts oder 37° links gedreht werden, damit die Farben nicht geschwächt werden; und so verhält es sich wirklich. Diese Untersuchungen, wie unvollkommen sie auch sind, scheinen mir doch hinreichend, um zu beweisen:

1. Daß die Krystalle des regulären Systems nicht als optisch homogene oder isotrope Körper betrachtet werden können.

2. Daß die Elasticitätsaxen des Aethers nicht immer mit den mechanischen Elasticitätsaxen zusammenfallen, und daß die Pressungen und Spannungen des Aethers nicht immer proportional gehen den molecularen Pressungen oder Spannungen.

3. Daß umgekehrt die optischen Eigenschaften allein unzureichend sind, um die im Innern der von Natur doppeltbrechenden Krystalle vorkommenden mechanischen Pressungen, ihrer Richtung und Gröfse nach kennen zu lehren.

1) Dasselbe habe ich an einem Würfel von borkieselsaurem Zink beobachtet.

XI. Untersuchungen über das Entfärbungsvermögen der Kohle und mehrerer anderer Körper;

von Hrn. E. Filhol,

Prof. an der Medicinschule zu Toulouse.

(*Comptes rendus T. XXXIV. p. 247*)¹).

Man sagt gemeiniglich, die Kohle sey der einzige einfache Körper, welcher die Fähigkeit habe, Farbstoffe aus Lösungen zu absorbiren; es geht aber aus den Arbeiten der HH. Bussy und Payen hervor, daß die Entfärbung durch Kohle ein rein physikalisches Phänomen ist, ein Färbungsphänomen. Mehrere zusammengesetzte Körper (Thonerde, auf nassem Wege bereitetes Schwefelblei, Bleioxydhydrat) besitzen ebenfalls die Eigenschaft, Flüssigkeiten zu entfärben; allein die Chemiker betrachten die Wirkung welche die Oxyde bei Bereitung der Lacke auf die Farbstoffe ausüben, meistens als eine chemische Wirkung, verschieden von der der Kohle; doch hat Berzelius geglaubt, die durch Oxyde und Metallsalze hervorgebrachte Entfärbung der von der Kohle bewirkten anreihen zu müssen.

Ich beabsichtige in dieser Arbeit zu zeigen:

1. Daß die Kohle nicht der einzige einfache Körper ist, der Flüssigkeit zu entfärben vermag, daß vielmehr auch Schwefel, Arsenik und Eisen (reducirt aus Sesquioxydhydrat durch Wasserstoff) sehr merklich entfärbend wirken.

2. Daß die Zahl der zusammengesetzten Körper, die mit Entfärbungsvermögen begabt sind, viel größer ist als man glaubt, und daß diese Eigenschaft weit mehr von dem Zertheilungszustand dieser Körper, als von den chemischen Qualitäten derselben abhängt.

3. Daß die Körper, welche sich eines Farbstoffs leicht bemächtigen, sehr wenig Neigung zu einem andern haben können. So entfärbt der (künstlich bereitete) phosphorsaure

1) Ausführlich in den *Ann. de chim. et de phys. T. XXXV. p. 206.*

Kalk der Knochen kaum das indigblau-schwefelsaure Natron, während es auf Lackmustinktur kräftiger wirkt als Beinschwarz.

4. Dafs die Entfärbung in den meisten Fällen ein rein physikalisches Phänomen ist. So wird eine und dieselbe färbende Substanz von Metalloiden, Metallen, Säuren, Basen, Salzen und organischen Substanzen absorbiert; auch ist es leicht, bei Anwendung eines zweckmäßigen Lösungsmittels den Farbstoff dem Körper, welcher denselben absorbiert hatte, unverändert wieder zu nehmen.

Die folgenden Resultate, die ich aus meiner Abhandlung ausziehe, werden einen Begriff geben von der Energie, mit welcher gewisse Substanzen entfärbend wirken. Die Beobachtungen wurden mit Collardeau's Calorimeter mit Doppelfernrohr angestellt.

Entfärbungsvermögen, bezogen auf das der mit Salzsäure gewaschenen thierischen Kohle, gleich 100¹⁾).

	Lackmustinktur		Indigblauschwefels. Natron	
	kalt.	warm.	kalt.	warm.
Kohle	100,00	100,00	100,00	100
Eisenoxydhydrat ²⁾	128,90	96,86	1,97	11,51
Goldschwefel	128,90	20,17		
Thonerde	116,00		9,91	
Magnesia	111,00	85,75		24,82
Phosphorsaurer Kalk	109,00	90,28	1,97	
Eisen, durch Wasserstoff reduc.	95,33			
Schwefelarsen, künstlich	88,90			
Braunstein	88,90		13,80	
Indigo	80,00		12,50	13,80
Zinkoxyd	80,00	60,54	6,55	23,08
Brauneisenstein	80,00	73,88	13,80	
Zinnsäure	70,40	20,17	(0)	
Chromsaures Blei	70,40	60,54	2,92	
Bleiglätte	66,66	20,17	3,85	10,72

1) Diese Tafel ist hier nicht aus den *Comp. rend.* entlehnt, sondern aus der späteren ausführlichen Abhandlung in den *Ann. de chim. et de phys.*, die indels auffallenderweise bei der Lackmustinktur die höchste aller Angaben, die vom Schwefelblei (130,00), so wie die übrigen eingeklammerten Zahlen nicht enthält. P.

2) *Hydrate de fer pur.*

	Lakmustinktur		Indigblauschwefels. Natron	
	kalt.	warm.	kalt.	warm.
Mennig	66,66			
Jodblei	66,66	100,89	3,85	
Antimonsäure	66,66	33,62	1,97	
Schwefelantimon, natürlich	59,25	50,44	(0)	
Schwefelsaures Blei	50,00	20,17	13,80	
Eisenoxyd, wasserfrei	44,45	33,62		
Eisenoxydoxydul	44,45			
Kermes	44,45	23,28		
Kupferoxyd	26,67	20,17	(0)	20,00
Calomel	22,22	23,28	(0)	
Schwefelmilch	26,67		(0)	
Schwefelblei, künstlich	(130,00)		16,67	
Schwefelsaurer Baryt	(50,00)		(0)	
Berlinerblau			13,80	
Kohlensaurer Kalk				13,80
Bleiglanz				13,80
Zinnober				7,31
Kohlensaures Blei				7,31
Filtrirpapier				13,80

XII. *Gehalt des zu Paris und Lyon gesammelten Regenwassers an fremden Substanzen.*

Als erstes Resultat einer chemischen Untersuchung des im Hofe der Pariser Sternwarte aufgefangenen Regenwassers giebt Hr. Barral in den *Compt. rend. T. XXXIV. p. 283* folgende Tafel:

Im Jahre 1851.	Gefunden in einem Kubikmeter		Gefallen auf 1 Hectare (10000 □ Meter.)	
	Juli — Dec. (6 Monate.)	Aug. — Dec. (5 Monate.)	Juli — Dec.	Aug. — Dec.
	Grm.	Grm.	Kilogramm.	Kilogramm.
Stickstoff	6,397	7,939	13,490	12,323
Ammoniak	3,334	2,769	7,032	4,299
Salpetersäure	14,069	21,800	29,695	33,840
Chlor	2,801	1,946	5,910	3,019
Kalk	6,220	5,397	13,114	8,398
Talkerde	2,100	2,300	4,450	3,700

Hierdurch veranlaßt, macht Hr. Bineau in den *Compt. rend. T. XXXIV. p. 358* die allgemeinen Resultate einer ähnlichen Arbeit über das im Winter 1851 — 1852 auf der Sternwarte zu *Lyon* gesammelte Regenwasser bekannt. Er fand darin keine Salpetersäure, wohl aber Ammoniak, in größerer Menge als Hr. Barral im Pariser Regenwasser. Im Januar und in der ersten Hälfte des Februars betrug der Ammoniakgehalt 28 bis 31 Milliontel, in der letzten Hälfte des Februars 18, während Hr. Barral nur 2 bis 3 angiebt. Er bemerkt indess, daß zu Caluire, einem hochgelegenen Orte in der Nähe von *Lyon*, gesammeltes Regenwasser viel weniger Ammoniak enthalte als das in der Stadt. Auch bezeichnet er es als einen Irrthum, daß der Schnee vorzugsweise zur Absorption von Ammoniak geneigt sey. Das Schneewasser aus der Stadt gab ihm nur 8 Milliontel Ammoniak, das vom Lande 7.

Auch Hr. Meyrac in Dax giebt in den *Compt. rend. T. XXXIV p. 714* die Resultate einer seit 1847 fortgesetzten Untersuchung des Regenwassers, doch nur in Bezug auf dessen Gehalt an Kochsalz. Er findet:

1. Daß das Regenwasser (zu Dax, *Dep. Landes*) stets Kochsalz enthält.

2. In desto größerer Menge als der Regen anhaltender ist, und besonders als er reichlicher fällt.

Anfangs, wenn der Regen in feinen Tröpfchen fällt, ist er in der Kälte ohne wahrnehmbare Wirkung auf das salpetersaure Silber; so wie er aber anhält, wird das Wasser von Stunde zu Stunde unreiner, bis es endlich das Maximum seiner Unreinheit erlangt. Im Herbst, Winter und Anfang des Frühlings enthält es mehr Kochsalz als im Sommer. Ein Platzregen (*pluie battante*) giebt immer sehr unreines Wasser, ausgenommen zu Gewitterzeiten.

Regenwasser, welches an denselben Tagen und zu denselben Stunden in *Bayonne* (4 Kilometer vom Meere) aufgefangen worden, enthält stets mehr Kochsalz als das zu *Dax* (30 Kilometer vom Meere). Umgekehrt verhält es

sich mit dem Regenwasser an östlicher gelegenen Orten: Orthez, Bagnères-Bigorre, Toulouse, Villefranche (Rhône).

Schnee enthält, wie der Thau, viel weniger Kochsalz als der Regen, auch Ammoniak und eine Spur von Jod, ist aber bisweilen viel reicher an organischen Stoffen als letzterer.

XIII. *Jährliche Regenmenge in und bei Bayonne.*

Nach den zu St. Pierre d'Irube, einem Dorfe bei Bayonne, von Don Agostin de Hurriaga gemachten Beobachtungen, die in den *Compt. rend. T. XXXIV. p. 134* veröffentlicht werden, betrug daselbst die Regenhöhe:

Jahr.	Millimeter.	Jahr.	Millimeter.
1842	1529	1846	1555
1843	1391	1847	1564
1844	1511	1848	1574
1845	1795	1849	1226.

Also im Mittel 1518 Millimeter. Zu Bayonne selbst fielen, im Jahre 1851, nach den Beobachtungen des Prof. Chilo, am grossen Seminar daselbst, 1474 Millimeter. Wie Hr. d'Abbadie bemerkt, hat man bisher das Becken der Saône, wo nach vierjährigen Beobachtungen, jährlich 891 Millimeter fallen, für die regenreichste Gegend in Frankreich gehalten

XIV. *Jährliche Regenmenge in Christiania.*

Eine längere Abhandlung über die meteorologischen Constanten von Christiania, die mir von ihrem Verfasser, Hrn. Prof. Hansteen, kürzlich übersandt worden, enthält in Betreff des Regens in jener Stadt folgende Angaben:

Jahr.	Mitteltemp. R°	Regenhöhe par. Lin.	Jahr.	Mitteltemp. R°	Regenhöhe par. Lin.
1839	3°,754	258",30	1845	3°,742	275",28
1840	4°,015	258",17	1846	5°,256	257",72
1841	3°,755	294",92	1847	4°,146	189",06
1842	5°,367	151",19	1848	3°,797	309",04
1843	4°,543	196",95	1849	3°,608	190",35
1844	3°,309	235",94	1850	3°,881	243",12

Im Mittel: Regenhöhe 238,34 par. Lin.

Nach den Monaten geordnet, giebt der Verf. folgende Zusammenstellung:

Mo- nate.	Regen- höhe.	Tempe- ratur.	Barome- terstand.	Mo- nate.	Regen- höhe.	Tempe- ratur.	Barome- terstand.
Jan.	12",496	— 4°,75	335",53	Juli	31",634	+12°,92	334",17
Febr.	7",634	— 4°,39	4",24	Aug.	40",423	+12°,31	4",68
März	11",800	— 1°,22	5",30	Sept.	28",415	+ 8°,93	5",78
April	7",187	+ 3°,00	6",06	Oct.	28",280	+ 4°,23	4",56
Mai	16",745	+ 8°,20	6",00	Nov.	19",822	+ 0°,18	4",31
Juni	22",357	+11°,61	4",56	Dec.	11",597	— 3°,09	6",01

XV. Bestimmung der Geschwindigkeit des Regens; von Hrn. Rozet.

(Compt rend. T. XXXIII. p. 581.)

Wenn der Regen, bei windstillem Wetter, senkrecht herabfällt, liefern die Eisenbahnen ein Mittel, die Geschwindigkeit seines Falls ziemlich genau zu bestimmen.

Das Fenster eines Eisenbahnwagens ist ein Rechteck, dessen grössere Seite, bei Ruhe des Wagens, der Falllinie eines senkrechten Regens ziemlich parallel ist; so wie sich aber der Wagen in Bewegung setzt, sieht man die Regentropfen sich neigen, in umgekehrtem Sinn der Bewegung, doch mit Beibehaltung des Parallelismus unter sich. Ein Tropfen, der am oberen Winkel der Vorderseite des Rechtecks anlangt, trifft die gegenüberstehende Seite in

einem gewissen Punkt. Zieht man durch diesen Punkt eine Horizontale, so erhält man ein zweites Rechteck, dessen Seiten in demselben Verhältniß stehen, wie die Geschwindigkeiten des Wagens und des Regens.

Als ich mich neulich im Postzuge auf der Eisenbahn von Paris nach Lyon, zwischen Beaune und Dijon, befand, und gerade, an allen Stationen zwischen beiden Städten, ein grofstropfiger Regen herabfiel, fand ich die beiden Seiten jenes Rechtecks fast gleich.

Der Postzug auf dieser Eisenbahn legt ungefähr 40000 Meter in der Stunde zurück; das macht, in meiner Beobachtung, für die Geschwindigkeit des Regens, bei Ankunft an der Erde, 11 Meter in der Sekunde. Diefs Mittel, die Geschwindigkeit des Regens zu messen, kann leicht vervollkommt werden.

Berichtigung.

Im Aufsätze des Hrn. Dr. Fliedener:

Beobachtungen über die Zerstreuungsbilder im Auge, Heft 3 d. Jahrgangs sind die auf S. 346 in Parenthese befindlichen Sätze »das stärkere oder geringere Hervortreten u. s. w.« nur durch ein Versehen stehen geblieben.